ИСТОРИЯ ФИНАНСОВ И УЧЕТА

О. Б. Шейнин
канд. физ.-мат. наук (Берлин)

ГАУСС И ТЕОРИЯ ОШИБОК

1. Математическая обработка измерений

1.1. Теория ошибок

Статистика обязана теории ошибок двумя принципами – наибольшего правдоподобия (Lambert, 1760, § 303) и наибольшего веса или наименьшей дисперсии (Гаусс, 1823a, b/1957). Мало того, с середины XVIII в. и до 1920–1930-х гг. теория ошибок оставалась основным полем приложения теории вероятностей. Вот свидетельство Пуанкаре (Poincaré, 1921/1980, p. 343; посмертная публикация, о своем трактате по теории вероятностей 1896 г.): *Теория ошибок естественно* (!) *была моей основной целью*. И даже позднее Леви (Lévy, 1925, p. 7) заметил, что без указанной теории это его основное исследование устойчивых распределений *не имело бы смысла*. Впрочем, для теории ошибок оно оказалось бессмысленным (Шейнин, 1995).

Термин *теория ошибок* (на немецком языке) ввел тот же Ламберт (Lambert, 1765, Vorberichte и § 321), но общеупотребительным он стал лишь в середине XIX в., потому что его применял только Бессель (но ни Лаплас, ни Гаусс). По Ламберту, теория ошибок изучала соотношение между погрешностями, их последствиями, обстоятельствами измерения и качеством инструментов. Мы (Шейнин, 2017) скажем, что теория ошибок – это приложение статистического метода к математической обработке измерений. Математику, быть может, следует считать приложением математического метода, а именно введением и изучением абстрактных структур, не обязательно существующих в природе. Простейший пример: комплексные числа.

Так, серию наблюдений следует считать выборкой: *Каждое наблюдение это... частный случай многих наблюдений* (Марков, 1924, с. 323, 373). Не вполне ясно ту же мысль выразил Гаусс (Гаус, 1809, § 172): *Вскоре новые наблюдения дадут повод новым исправлениям*. И именно представительной выборкой, поскольку наблюдения должны представить изучаемые неизвестные, не искаженные систематическими влияниями.

1.1.1. Истинное значение измеряемой величины. Первый вариант математической статистики создал Р. А. Фишер. Он (Fisher, 1922, p. 309), в частности, ввел понятия о состоятельной, эффективной и достаточной оценках искомых параметров функций распределения. С тех пор статистика должна была считать своей целью именно оценку этих параметров, а не отыскание их истинных значений.

Философы давно заметили: чем более математика абстрактна, тем полезнее, но вот сам Фишер на следующей же странице упомянул истинное значение неизвестного! То же можно сказать о Гауссе (Гаусс, 1816/1957, § 3 и 4) и о современных статистиках (Hald, 2004, p. 105). Гаусс даже рассматривал меры точности, которые не существуют (во всяком случае, в обычном смысле) в реальном мире. Полного разрыва с теорией ошибок не произошло, да и не могло произойти: истинные значения (скорость света в пустоте, масса электрона) упоминают и физики, и метрологи, да и вообще все потребители теории ошибок, которые и от статистики никак не отказываются. И все же некоторые статистики (Chatterjee, 2003, p. 264) считают выражение *истинная величина* отжившим.

Формальное определение истинного значения измеряемой величины предложил Фурье (Fourier, 1826/1890, p. 533–534), который тем самым придал ему математический (взамен философского) смысл: это – предел среднего арифметического из ее неограниченно возрастающего числа (практически из большого числа ее) измерений. Многие авторы независимо друг от друга и не ссылаясь на Фурье, повторяли это определение, которое эвристически напоминает определение вероятности по Мизесу.

Фурье заявил, что измерения следует производить при одних и тех же условиях, как и должно быть в метрологии, но никак не в других отраслях науки: условие Фурье воспрепятствует получению представительных выборок. В иной формулировке наше замечание важно и для статистики. Но даже в метрологии естественно сравнивать результаты, полученные в нескольких лабораториях.

Существенное следствие: истинное значение искажено остаточными систематическими (да и случайными) ошибками. Американские метрологи приняли массу стандарта массы равной его металлическому содержанию с добавлением *массы среднего объема воздуха, адсорбированного на его поверхности* (Eisenhart, 1963/1969, p. 30–31). Ничего другого придумать было нельзя.

Марков врядли знал об определении Фурье (и других), но он разумно заметил (Марков, 1900/1924, с. 323):

Прежде всего, необходимо допустить существование чисел, приближенные величины которых доставляются наблюдениями.

1.1.2. Отбраковка наблюдений. Эта деликатная операция не поддается формальному исследованию уже потому, что результаты наблюдений искажены систематическими ошибками, а отличить просчет от «законной» крупной ошибки трудно. Математико-статистические критерии (появившиеся после Гаусса) не получили широкого применения в теории ошибок. Самым простым и притом весьма распространенным является критерий трех сигма. Но вот Гаусс (письмо Ольберсу 3 мая 1827 г., W-8, S. 152–153) указал, что при не очень большом числе наблюдений и отсутствии основательных знаний предмета отбраковка *всегда сомнительна*.

И вот, видимо, современное понимание вопроса. Барнет и Льюис (Barnett, Lewis, 1978/1984) исследовали отбраковку наблюдений в статистике и пришли к неутешительному выводу (p. 360), который можно считать универсальным:

Главной задачей остается та, которая встретилась самым первым исследователям: какое наблюдение считать уклоняющимся и что с ним делать?

1.1.3. Субъективный подход. Он неизбежен. В теории ошибок упомянем взвешивание наблюдений и отбраковку наблюдений (§ 1.1.2). Таково же положение в статистике, поскольку многие решения принимаются полностью или частично субъективно. Назовем группировку наблюдений, организацию переписей и выборочных исследований, да и работу экспертов.

1.1.4. Детерминированная теория ошибок. Все тот же Ламберт (Lambert, 1765, § 321) определил *теорию последствий*, т. е. изучение ошибок функций измеренных величин; фактически величин, ошибки которых известны. Его вторая теория была детерминированной ветвью теории ошибок, не связанной с вероятностными представлениями. Вот ее первая задача: определить форму геодезической фигуры, при которой координаты искомых пунктов будут менее всего искажены заданными погрешностями измерений.

Развитие детерминированной теории ошибок было непосредственно связано с трудами Гаусса и Бесселя (исследование погрешностей инструмента и методов наблюдений, да и схем прокладки триангуляции). Вообще же отыскание погрешности (можно сказать, дифференциала) функции нескольких аргументов по их заданным погрешностям (дифференциалам) является задачей дифференциального исчисления.

Гельмерт (Helmert, 1868) исследовал точность различных программ наблюдений в геодезии с точки зрения еще не существовавшего линейного программирования: как достичь наибольшего веса результатов при заданном объеме работы или достичь их заданного веса при наименьшем объеме? Он заметил, что некоторые измерения вообще не нужны, что соответствовало теории линейного программирования (но практически неверно). Его исследование продолжили другие авторы, а работа (Grafarend, Harland, 1973) оказалась уже, видимо, слишком сложной для практического применения.

Во всяком случае, детерминированная ветвь теории ошибок была поглощена новыми разделами статистики, а именно предварительным исследованием данных (с выявлением их скрытых структур, например систематических ошибок) и планированием эксперимента.

Труды Бесселя были на виду, Гаусс же в основном представлял свои исследования в виде официальных отчетов, которые даже после их публикации в его трудах (*Werke*) не привлекали большого внимания. Все же, во-первых, назовем его способ точного взвешивания, близкий к современному (Pukelsheim, 1993, p. 427), который Гаусс описал лишь в письмах Шумахеру 1836 и 1839 гг. Подробнее см. (Шейнин, 2007, с. 144). Во-вторых, Гаусс исследовал ганноверские меры и веса, но отчет об этой работе был опубликован лишь в 1927 г. (W-11/1), см. также **S, G** 74 [S, G: см. пояснение к источникам]. Там же мы опубликовали выдержки из писем Гаусса о мерах и весах.

1.1.4. Теория ошибок плохо известна. Характерный пример: Донахью (W. Donahue), переводчик латинского текста *Новой астрономии* Кеплера (Kepler, 1609/1992), проделал громадную работу, притом снабдил свой перевод примечаниями, но ни единого слова не сказал по поводу уравнивания наблюдений у Кеплера. А сказать было что, и вот главное (но не единственное). Кеплер указал, что отказался от Птолемеевой системы мира, потому что она не соответствовала угловым наблюдениям Тихо Браге, которые не могли быть ошибочными на 8 минут. Мы полагаем, что Кеплер воспользовался элементами метода минимакса (§ 2.1).

Поразительное невежество в этой области проявили и некоторые другие астрономы, а математики? Назовем В. Я. Цингера и Чебышева (§ 2.2), Фишера, Пуанкаре и снова Чебышева (§ 3.2.1) и Бертрана (§ 3.2.3). И вот статистики (Eisenhart, 1978, p. 382):

Когда в 1890-е годы Карл Пирсон и Юл начали заниматься математической теорией корреляции, они обнаружили, что можно было сразу же применить многое из математического инструментария, разработанного Гауссом [...]. *Его вклад в метод наименьших квадратов включает математику, существенную для статистической теории и ее приложений почти ко всем нынешним отраслям науки*.

Можно думать, что они обнаружили это обстоятельство далеко не сразу.

Особо упомянем несуществующую теорему Гаусса–Маркова, которая все еще не забыта (Dodge, 2003, p. 161), фактически же это теорема Гаусса (Гаусс, 1823b/1957). Оказывается, что Нейман (Neyman, 1934, p. 595) ошибочно приписал Маркову второе обоснование метода наименьших квадратов (МНКв). Его ошибку повторили Флоранс Найтингейл Дейвид и Нейман (David, Neyman, 1938), но впоследствии Нейман (Neyman, 1938/1952, p. 228) признал свою непонятную ошибку. Непонятную потому, что он сам (Neyman, 1934, p. 593) заметил, что

значимость работы Маркова о наилучших линейных оценках в основном состоит, как я думаю, в ясной формулировке проблемы.

Наконец, укажем, что выражение *теорема Гаусса—Маркова* придумал Леман (Lehman, 1951); так сообщил Дейвид (H. David) в своей неопубликованной рукописи не ранее 2001 г.

1.1.5. Основные задачи. Пусть имеются наблюдения

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$$

неизвестной константы. Требуется назначить ее значение, оптимальное в том или ином смысле, и оценить его погрешность. В классической теории ошибок наблюдения считаются независимыми и, как можно считать, равноточными, потому что в противном случае они могут быть надлежащим образом взвешены. Описанная задача называется *уравниванием прямых* (*непосредственных*) *наблюдений*.

Пусть теперь исходные уравнения имеют вид

$$a_i x + b_i y + ... + l_i = v_i, i = 1, 2, .., n. \quad (1)$$

Здесь свободные члены результаты физически независимых измерений, а коэффициенты задаются соответствующей теорией. Имеется в виду, что число независимых уравнений n, т. е. измерений, превышает число неизвестных k, иначе никакого принципа решения системы не требовалось бы отыскивать. Строгих решений подобных систем не существует; за решение приходится принимать любой набор $\hat{x}, \hat{y},...$ приводящий к разумным значениям остаточных свободных членов v_i. Эта задача, с учетом оценки точности полученных результатов, называется *уравниванием косвенных наблюдений.*

Разумный выбор решения $\hat{x}, \hat{y},...$ осуществляется введением условия (ограничения) на эти величины v_i. В частности, вводится условие или принцип наименьших квадратов

$$v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = \min.$$

Разработанный МНКв относится к теории ошибок.

Линейность уравнений не является стеснительной, поскольку приближенные значения неизвестных могут быть определены, например, из решения любых k уравнений.

Следует особо сказать о среднем арифметическом. Оно стало универсальной оценкой неизвестной константы (иначе: оценкой параметра сдвига закона распределения изучаемой случайной величины) во времена Кеплера или ранее. А. Р. Бируни (973—1048) в одном и том же исследовании плотностей металлов, однако, применил в качестве оценки и моду, и среднее из крайних наблюдений, и даже какое-то неопределенное значение (Ал-Хазини, 1983, с. 60—62).

Древние астрономы, по существу, выбирали искомую оценку произвольно, что было оправдано в случае крупных ошибок наблюдения. Это косвенно, но определенно следует из сочинений нескольких историков астрономии, и это в большой степени оправдывает и статистиков, которые вплоть до начала XX в. не желали слышать о математике. Уже с опозданием Кауфман заявил, что кривые распределения, уравнивание (?) серий наблюдения, интерполяция и корреляция вредны (Кауфман, 1922, с. 152), а Борткевич слишком общо, а потому неверно решил, что исследование точности является вторичной целью статистики, роскошью (Борткевич, 1894—1896/1968, с. 126).

Бернштейн высказал необычную мысль о приложениях теории корреляции, которая частично оправдывает Кауфмана: *Большинство ее применений, кроме биологических, основано на недоразумении* (Бернштейн, 1928/1964, с. 231)

1.1.6. Новая теория ошибок. Мы можем только назвать книгу Джунь (2015). Он пояснил появление этого новшества существованием отраслей естествознания, в которых применяются громадные количества наблюдений. Классическая теория ошибок в таких случаях неудовлетворительна, замечает автор, который, по существу, чуть ли не отвергает ее (но знаком с ней явно недостаточно). Мы не беремся описывать его книгу; ему следовало бы изложить суть новой теории в краткой статье.

2. Лежандр, Лаплас

2.1. Лежандр

Лежандр (Legendre, 1805) первым опубликовал *принцип наименьших квадратов* (известный Гауссу с 1795 г.), но МНКв разработал Гаусс. Он разумно отказался от своего первого обоснования метода (1809) и предложил второе обоснование (Гаусс, 1823b/1957; Гаусс, 1828a/1957), основанное на принципе наибольшего веса (наименьшей дисперсии). Это обоснование мы рассматриваем в § 3, но вначале скажем несколько слов о Лежандре и Лапласе.

Гаусс (1809/1957, § 186), хоть и упомянул публикацию Лежандра, назвал принцип наименьших квадратов *своим*. В том же году Лежандр послал Гауссу письмо, указывая, что приоритет определяется только по публикациям, Гаусс же, к сожалению, промолчал. Он восстановил против себя французских математиков, включая Пуассона (но не Лапласа), а в 1820 г. Лежандр, который был на 25 лет старше Гаусса, публично обвинил Гаусса в присвоении своего открытия. Впрочем, он мог бы даже без всяких писем заявить: пусть Гаусс считает так, как хочет, но никто с ним не согласится. Подробнее см. (Шейнин, 2013, § 10.A.1.4).

Но вот неожиданное окончание их отношений (письмо Гаусса Шумахеру 17 октября 1824 г. (W/Erg-5.1, S. 413 первой пагинации):

С негодованием и печалью... прочел, что старика Лежандра, красу и гордость своей страны и своей эпохи, лишили пенсии [по политическим мотивам].

Вот основная фраза из сочинения Лежандра (Legendre, 1805, p. 72–73):

Необходимо, чтобы крайние ошибки без учета их знака были заключены в возможно более узкие пределы [...].

Оптимальный подход, который применил Лежандр, состоял в том, чтобы добиваться минимального значения суммы квадратов ошибок, а фактически — остаточных свободных членов исходных уравнений. Первое утверждение Лежандра было также ошибочным: на самом деле оно указывало на принцип минимакса

$$|v_{\max}| = \min.$$

Здесь максимум понимается относительно всех v_i, а минимум — относительно любого набора оценок $\hat{x}, \hat{y},\ldots$ неизвестных величин $x, y,\ldots$.

Тем не менее Стиглер (Stigler, 1986, p. 13) заявил, что изложение этого нововведения было у Лежандра *одним из самых понятных и самым элегантным введением нового статистического метода в истории статистики*. И на с. 57 и 146 он снова высоко оценил Лежандра, притом в отличие от Гаусса!

Принцип минимакса не приводит к оценкам, обладающим каким-либо оптимальным вероятностным свойством, но он важен в ином смысле. Пусть при любых $\hat{x}, \hat{y},\ldots$ $|v_{max}|$ находится в разумных пределах, тогда теория, которая обосновала исходные уравнения, не опровергается ими, а наблюдения достаточно точны. В противном же случае либо теория неверна, либо наблюдения недостаточно точны. Принцип минимакса видимо применил Кеплер (см. § 1.1.4), а Эйлер и Лаплас применили его в своих опубликованных работах. Но только Лаплас отыскал алгоритм для его применения, а до него можно было только проверить несколько разумных наборов $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ (но не все возможные наборы!). Легко доказать, а Гаусс (1809/1957, § 186) прямо указал, что принцип минимакса равносилен обобщенному принципу наименьших квадратов

$$\lim(v_1^{2m} + v_2^{2m} + \ldots + v_n^{2m}) = \min, \ m \to \infty.$$

2.2. Лаплас

Известно, что он нестрого доказал несколько вариантов центральной предельной теоремы, предположив, что число измерений, удовлетворяющих условию этой теоремы, следовательно, было велико, так что закон распределения их вероятностей нормален (позднейшие термины). Указанное условие уже было слишком стеснительным (и притом недостаточным), но он, кроме того, выбрал минимум абсолютного ожидания в качестве критерия обработки измерений. Вычисления оказывались возможными лишь для нормального распределения, и Гаусс (1821) это отметил.

Иногда, правда, Лаплас отступал от своей схемы и следовал за Гауссом, но в общем оказалось, что французские математики, включая Пуассона, по существу пренебрегли исследованиями последнего, тем более что они поддерживали Лежандра.

Лаплас сбил с толка не только французов. В. Я. Цингер, явно не читавший Гаусса или не разобравшийся в его сочинениях, заявил, что Лаплас привел *строгое* [?] *и беспристрастное исследование*, Гаусс же *старался на основании посторонних соображений придать* [МНКв] *безусловное значение* (Цингер, 1862, с. 1). На самом деле Гаусс прямо указал, что вводит принцип наибольшего веса в качестве критерия уравнивания, что это произвольно, но что суть задачи требует чего-то произвольного.

Чебышев в своих лекциях (Чебышев, 1879–1880/1936, с. 252) разъяснил, что изложил МНКв по Лапласу, а на с. 250 критиковал первое Гауссово обоснование метода, о втором же умолчал.

3. Гаусс

3.1. До 1823 г.

Не существует никаких четких доказательств того, что в то время Гаусс, как он утверждал, применял принцип наименьших квадратов. Только Жерарди (Gerardy, 1977, p. 19, прим. 16) сообщил что-то подобное, но, к сожалению, он уделил основное внимание вычислениям элементарных геодезических построений и уверенно проверить его вывод трудно.

С другой стороны, опровергнуть утверждение Гаусса невозможно. Во-первых, он вычислял очень быстро и не контролировал себя, а потому допустил немало ошибок (Maennchen, 1918/1930, S. 65 и след.), одну из которых мы упомянем в § 3.2.2-1; во-вторых, он мог назначать различные и неизвестные нам веса уравниваемым измерениям; в-третьих, он (1809, § 185) допускал приближенные вычисления; наконец, он мог применять свой принцип для пробных вычислений.

К этому следует добавить, что современники Гаусса единодушно верили ему (быть может, и знали точно). Среди них можно назвать Лапласа (Laplace, 1812/1886, p. 353) и даже Цаха, который будто бы отказывался подтвердить правоту Гаусса. На самом же деле Гаусс и не сообщил ему суть своего принципа, см. его письмо 1831 г. Шумахеру (W/Erg-5, Tl. 1, S. 292). Позднее Цах (von Zach, 1813, S. 98 прим.) даже перестарался: *Прославленный д-р Гаусс владел этим методом с 1795 г. и с выгодой применил его* [в *Теории движения* (1809)]. Подтвердить это нельзя.

Заметим также, что ни естествоиспытатели, ни статистики не могут, как правило, придерживаться строгих ограничений, и это — дополнительный довод в пользу приоритета Гаусса. Особо характерен крупнейший астроном (и общественный деятель) Ньюком (Sheynin, 2002). Он обработал более 62 тысяч наблюдений Солнца и планет, и ему пришлось сравнивать результаты, полученные на различных обсерваториях мира. Этим результатам, т. е. обсерваториям и, быть может, конкретным наблюдателям, он как-то назначал веса, притом отдельно для случайных и систематических ошибок.

Ньюком переписывался с Пирсоном. Вот два из его архивных писем от 27 июня 1903 г. и 1 ноября 1907 г.:

Вы — тот ныне живущий автор, чьи работы я почти всегда читаю, если есть время и смогу их достать, — тот, которого я мысленно опрашиваю во время чтения.

Я все более интересуюсь каждым направлением Ваших работ и откладываю свое активное участие в них только потому, что должен закончить некоторые астрономические исследования.

Этих исследований он так и не закончил.

Гаусс разъяснил свой принцип многим коллегам и друзьям еще до 1805 г., в том числе Бесселю (Bessel, 1832/1848, S. 27) и Вольфгангу Больяи (Sartorius von Waltershausen, 1856/1965, S. 43), отцу более известного Яноша Больяи, одного из авторов неевклидовой геометрии, и Ольберсу.

По указанному поводу Стиглер (Stigler, 1986, p. 145) заявил, что Гаусс *выпрашивал неохотные свидетельства у друзей*. Еще более клеветническим было его позднейшее заявление (Stigler, 1981/1999, p. 322): Ольберс будто бы поддержал Гаусса *только после семи лет повторных подталкиваний*.

27 июня 1809 г. Гаусс (W/Erg-4(1), S. 44) спросил Ольберса, помнит ли он, что узнал о принципе наименьших квадратов от него, Гаусса, до 1805 г. Ответ Ольберса неизвестен, но позднее Гаусс (24 янв. 1812, там же, S. 493) спросил, готов ли Ольберс подтвердить это в печати, и на этот раз Ольберс 10 марта 1812 г. (там же, с. 495) четко ответил: *Да, и охотно*. Но в 1812—1815 гг. Ольберс не опубликовал ничего подходящего (см. соответствующий том в издании *Catalogue of Scient. Literature*, Royal Society). Первая возможность появилась позже*: Да, Гаусс разъяснил ему свой принцип в июне 1803 г.* (Olbers, 1816, S. 192 прим.).

Вспоминается утверждение Трусдела (Truesdell, 1977/1984, p. 292), вполне подходящее Стиглеру:

Знание больше не является целью научного обучения [...]. *Ныне, по определению, истина отвергается как отжившее суеверие*.

Гаусс (§ 177) принял *как аксиому*, что среднее арифметическое из многих наблюдений окажется наиболее вероятным значением [измеряемой константы], *если не абсолютно точно, то очень близко к этому*. Далее он (§ 175) определил плотность распределения ошибок наблюдения (хотя и не предложил для нее никакого термина), полагая ее одновершинной и *в большинстве случаев* четной; таковым было его понимание случайных ошибок, и приняв, что среднее арифметическое является в то же время вероятнейшей оценкой неизвестной константы.

Можно полагать, что Гаусс с самого начала не был удовлетворен этим выводом. Его формулировки принципа арифметической средины и свойств искомой плотности содержали оговорки, а выведенный принцип наименьших квадратов оказался аксиомой. Да и трудно предположить, чтобы Гауссу понравилось появление универсальной плотности.

3.2. Год 1823-й

3.2.1. Общие сведения. В § 2 (с пояснением в § 1) Гаусс исключил из рассмотрения систематические ошибки. В § 17 он повторил это утверждение и заявил, что собирается обобщить свое изложение, но так и не выполнил этого обещания.

В § 6 Гаусс ввел дисперсию, как она теперь называется, в качестве основной меры погрешности и разумно объявил интегральную меру предпочтительнее принципа наибольшего правдоподобия, которого придерживался в 1809 г. И здесь, и в предварительном сообщении (1821) он также указал, что выбрал простейшую (интегральную) меру.

Гаусс пояснил свое решение по меньшей мере в двух письмах, более подробно в письме Бесселю 1839 г. (W-8, S. 146—147): отыскивать значение неизвестной величины по принципу наибольшего правдоподобия нет смысла, потому что даже максимальная вероятность результата останется бесконечно малой. Заметим, что и вообще бесконечно мала вероятность случайной величине, распределенной на конечном интервале, находиться в любом бесконечно малом промежутке.

Гаусс продолжал: важнее свести к минимуму некоторый интеграл; в конце § 17 своего нового мемуара он выбрал дисперсию (позднейший термин), хотя практически применял ее выборочное значение (см. § 3.2.2) .

Странно, что Сийл (Seal, 1967/1970, p. 209—210) выдумала иную причину решения Гаусса. Она указала, что в 1823 г. Гаусс доказал, что при одновершинной и симметричной плотности распределения (а не только нормально распределенная) случайная величина находится в пределах $2\sigma^2$ с вероятностью 0,89.

Отметим одно определение, предложенное Гауссом в 1823 г. В § 18 он предложил, хоть и не вполне формально, свое определение независимых функций наблюдений: они не должны содержать общих аргументов. Почему-то только в § 19 он уточнил, что эти функции полагались линейными; в противном случае его определение противоречило бы теореме Стьюдента—Фишера о независимости среднего арифметического и выборочной дисперсии.

Схема советской триангуляции, разработанная Ф. Н. Красовским (автором референц-эллипсоида его имени), соответствовала определению Гаусса: ее отдельные звенья были в наибольшей возможной степени взаимно независимы, поскольку линейные и азимутальные измерения на их концах можно было считать безошибочными сравнительно с собственно угловыми измерениями. И вообще, не ссылаясь ни на Гаусса, ни друг на друга, его определение неизменно повторяли (а иногда подразумевали) в геодезии, и можно заключить, что его применяли и до Гаусса. Новой, однако, была его оговорка в § 19.

Более того, советские геодезисты интуитивно вводили в своих публикациях меру зависимости, отношение числа общих наблюдений к их полному числу. Ту же меру предложил Каптейн (Kapteyn, 1912), статья которого либо осталась незамеченной, либо была быстро забыта.

В 1888 г. определения, подобного Гауссову, в статистике придерживался Гальтон (Pearson, 1920/1970, p. 199):

Корреляция должна быть следствием того, что вариация двух органов была частично обусловлена общими причинами.

Впрочем, оговоримся: корреляция не равносильна зависимости.

Основные параграфы мемуара Гаусса исключительно тяжелы, что несомненно послужило одной из причин живучести его первого обоснования МНК в 1809 г.; мы советуем воспользоваться изложением Идельсона (1947) либо современными доказательствами, например (Колмогоров, 1946) или (Hald, 1998, p. 471–475). Айзенхарт (Eisenhart, 1964, p. 24) указал, что рассматриваемый мемуар Гаусса был известен только профессиональным квалифицированным статистикам. Это в первую очередь относилось к США, но, например, англичанин Эддингтон (1933) тоже не слышал об этом мемуаре. Возможно, что только в России положение было иным: Марков (1899/1951, с. 246) решительно выступил в защиту второго обоснования МНКв. Он, правда, обесценил свое утверждение, заявив, что не считал этот метод оптимальным в каком-либо смысле, см. также (Шейнин, 2009, с. 111). До Маркова в защиту мемуара Гаусса 1823 г. выступил Айвори (Ivory, 1825, p. 7), а позднее — несколько английских геодезистов, но оказалось, что их забыли, тем более что нормальный закон появился в антропометрии (Кетле, который по совету Гумбольдта и ввел этот термин, выделив его из антропологии) и физике (знаменитое распределение Максвелла).

Накапливались, правда, и примеры уклонения от нормальности. Бессель (Bessel, 1818; Бессель, 1838/1961) мог бы первым заявить об этом, но предпочел вначале умолчать о таких уклонениях, а во втором случае просто обманул читателей. В той же статье 1838 г. он доказал центральную предельную теорему (разумеется, нестрого, но не в этом дело) и, конечно же, решил защитить ее. Обсуждая три длинные серии астрономических наблюдений (по несколько сот наблюдений каждая), он заявил, что проявленные в них уклонения от нормальности исчезнут при большем (!) числе наблюдений. О других (но не всех) эпизодах халтуры у Бесселя см. (Sheynin, 2000). Так, прочитав посмертные рукописи Бесселя, Гаусс (письмо Шумахеру 27 декабря 1846 г.) *ужаснулся* его небрежности, а в других письмах Ольберсу (20 августа 1817 г.) и Шумахеру (между 14 июля и 8 сентября 182 г.) установил, что Бессель завышал точность своих измерений и инструментов.

Последующие события действительно показали, что сочинения Гаусса по теории ошибок оставались плохо известными, притом не только ввиду своей сложности (§ 2.2.1). Так, Чебышев (1879–1880/1936, с. 249) без объяснения указал, что формулу (2), см. ниже, начали применять *недавно*. Фишер (Fisher, 1925/1990, p. 260) заявил, что МНКв является специальным приложением принципа наибольшего правдоподобия, что было верно лишь для первого Гауссова обоснования, а Пуанкаре (Poincaré, 1896/1912, перевод 1999, с. 154) назвал отказ Гаусса от этого обоснования *достаточно странным*. В своем трактате он ссылался только на Бертрана, чья книга (Bertrand, 1888) поражает обилием ошибок и необоснованных утверждений (Sheynin, 1994). Если Пуанкаре читал Гаусса, то только мимоходом. Вот мнение Борткевича (Борткевич, Чупров, 2005) из письма № 19 Чупрову 1897 г.:

Поражает через меру почтительное отношение к Бертрану. Следов специального знакомства с литературой теорий вероятности [!] *незаметно. Курс написан так, будто* [ни] *Лапласа*, [ни] *Пуассона, в особенности последнего, не было на свете*.

Возвращаемся к мемуару Гаусса 1823 г. Он отыскивал несмещенные оценки $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ неизвестных, обладающих наибольшим весом (наименьшей дисперсией), и доказал, что они определяются по принципу наименьших квадратов. В этом и заключалось его второе обоснование указанного принципа, которое не вполне верно называется обоснованием *метода* наименьших квадратов. Разумеется, аналогичное уточнение следует иметь в виду и по поводу первого обоснования МНК в 1809 г. Несмещенность оценок достигалась тем, что они отыскивались в виде линейных функций результатов измерений (которые предполагались несмещенными, см. его § 2) без свободных членов.

Оценки, полученные по принципу наименьшей дисперсии, Гаусс назвал наиболее надежными, а не вероятнейшими, которые соответствовали принципу наибольшей вероятности (Гаусс, 1809/1957). В русском переводе мемуара 1823 г. это новшество не заметили.

Бессель, который в 1816 г. формально ввел вероятную ошибку как меру точности, неизменно применял ее, и его примеру последовали, видимо, все авторы, например Менделеев и Ньюком. Исключением оказался Струве (Struve, 1887, тезисы на последней ненумерованной странице). Гаусс в своей переписке счел вероятную ошибку ненадежной, поскольку она, в отличие от дисперсии, зависела от соответствующего закона распределения. И все же Гаусс применял эту меру и в письмах, и несколько раз в своей публикации (Гаусс, 1828b/1957), молчаливо предполагая наличие нормального закона. Только при этом условии вероятная ошибка оказывается не хуже дисперсии. Подробнее о вероятной ошибке см. расширенный перевод **S, G,** 72 нашей статьи (Sheynin, 1979).

3.2.2. Выборочная дисперсия. Формулу корня квадратного из выборочной дисперсии

$$\sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} \qquad (2)$$

Гаусс вывел в § 38. Здесь $[vv] = v_1v_1 + v_2v_2 + \ldots + v_nv_n$. Более точно, Гаусс вывел ожидание этой меры, $E\sigma$, и по необходимости принял, что $\sigma = E\sigma$. Многие позднейшие авторы заново выводили эту формулу, но нам достаточно упомянуть Колмогорова (1946), который применил при этом многомерную векторную геометрию.

3.2.2-1. Точность выборочной дисперсии. Перед выводом формулы (2) Гаусс (§ 37) заметил, что *обычная* формула для σ с n в ее знаменателе была не совсем верной. То же он (Гаусс, 1823a/1957) указал и ранее и добавил, что переход к (2) необходим и по существу, и ввиду *достоинства науки*. Его замечание означало отрицание смещенных оценок вообще; ниже (§ 3.2.2–2) мы вернемся к этому обстоятельству.

Гаусс (Gauss, 1823b/1903, § 39 и 40) вывел дисперсию дисперсии σ^2. Вычисления оказались нетрудными, но несколько тягостными, и он допустил ошибку. Безошибочной оказалась его дополнительная формула для случая нормального распределения:

$$D\sigma^2 = 2\sigma^4/(n-k). \qquad (3)$$

Гельмерт (Helmert, 1904) исправил указанную ошибку, но записал свой результат небрежно, что могло исказить его. Независимо ту же задачу выполнили Колмогоров и др. (1947), получив для $\nu^4 - 3s^4 < 0$:

$$\frac{\nu_4 - s^4}{n-k} < D\sigma^2 < \frac{\nu_4 - s^4}{n-k} + \frac{k}{n}\cdot\frac{3s^4 - \nu^4}{n-k},$$

где $s^2 = E\sigma^2$, и указав аналогичную формулу для противного случая. В сопроводительной статье Мальцев доказал, что оба неравенства можно полагать нестрогими (Мальцев, 1947).

3.2.2-2. Несмещенность. По крайней мере, в геодезии практической мерой точности является не σ^2, а σ (средняя квадратическая ошибка), которая в отличие от первой смещена. Так насколько важна несмещенность? Иногда несмещенные оценки просто не существуют, но представляется, что в настоящее время смещенность вообще допускается в какой-то степени (Sprott, 1978, p. 194).

Дополнительно заметим свидетельство Чубера (Czuber, 1891, S. 460), который обсуждал оценку точности наблюдений с Гельмертом. Они заключили, что относительная дисперсия $D\sigma^2/\sigma^2$ важнее абсолютной $D\sigma^2$. Эддингтон (Eddington, 1933, p. 280) независимо повторил их основной вывод. Можно заметить здесь некоторую аналогию с выбором меры зависимости функций наблюдений (§ 3.2.1). Более того, можно высказать аналогичное утверждение по поводу смещенности: важнее ее отношение к дисперсии, или иначе: остаточная систематическая ошибка не так важна, как ее отношение к случайным ошибкам. Опираясь на сомнительные соображения, так полагали по крайней мере советские геодезисты.

Для смещенной оценки выборочной дисперсии в случае одного неизвестного, т. е. при $k = 0$, а не 1, Крамер (Cramér, 1946, § 27.4) вывел формулу

$$D\sigma^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^{\,2}}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^{\,2})}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^{\,2}}{n^3}$$

и дополнительно предложил для случая нормального распределения формулу

$$D\sigma^2 = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

3.2.2-3. Возможность приложения основной формулы. Ее длительное забвение. Мы указывали, что Гаусс не рассматривал систематических ошибок. Тем не менее, будучи не только математиком, но и естествоиспытателем, в частности геодезистом, он разумно опасался их и редко применял практически свою формулу (2). Выдержки из нескольких его полевых журналов опубликованы (W-9, S. 278–281), и есть свидетельства современников, например Шрейбера (Schreiber, 1879, S. 141), доказывающие, что Гаусс наблюдал каждый угол до тех пор, пока не убеждался в ненужности дальнейшей работы. При небольшом числе наблюдений он выводил единое значение σ по нескольким станциям, см. его письма Бесселю 1821 г. (W/Erg-1, S. 382) и Герлингу (W/Erg-3, S. 687 и 744). По крайней мере один раз Лаплас поступил так же, см. Приложение № 3 примерно 1819 г. к его руководству (Gauss, 1812/1886), и то же мнение высказал Ку (Ku, 1967/1969, p. 309). Применять формулу (2) все же приходится, но только после окончания всех полевых работ по данному массиву наблюдений, учитывая *невязки* треугольников и расхождения между линейными и между азимутальными измерениями на концах звена триангуляции, т. е. фактически принимая во внимание, насколько это возможно, и систематические ошибки.

3.2.3. Критика. Получив согласие Гаусса, Бертран перевел его мемуары по теории ошибок на французский язык (Gauss, 1855). Заметим, что таким образом Гаусс, по крайней мере к концу жизни, видимо, смягчился: он раньше по политическим причинам отказывался публиковать свои сочинения на французском языке. Гаусс умер в том же 1855 г., не успев просмотреть перевод (Bertrand, 1855).

Много позже Бертран в своем руководстве (Bertrand, 1888, p. 281–282), и подробнее в одной из заметок того же года, раскритиковал формулу Гаусса (2). Молчаливо приняв нормальное распределение, он на примере отыскал оценку точности с меньшей дисперсией, чем обеспечивала эта формула. Его рассуждение показало, однако, что он не учел, что, в отличие от его меры точности, формула (2) обеспечивала несмещенность. Более того, вместо своих неприятных вычислений он мог бы воспользоваться формулой Гаусса (3), но, видимо, забыл о ней. Именно его вывод послужил поводом для рассуждений Чубера и Гельмерта (§ 3.2.2-2).

4. Иное обоснование метода наименьших квадратов

Описывая формулу (2), Колмогоров заметил, что она является лишь определением σ (Колмогоров, 1946, с. 64). Да, с учетом числа степеней свободы корень из выборочной дисперсии *должен* иметь указанный вид, но мы полагаем, что доказывать эту формулу все-таки нужно. И доказательство, предложенное многими авторами? начиная с Гаусса, достаточно просто. Необходимыми ограничениями были при этом линейность уравнений (1), независимость их свободных членов (т. е. измерений) и несмещенность искомых оценок $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$, т. е. их представление линейными функциями результатов (несмещенных) наблюдений без свободных членов.

Основное, однако, в том, что принцип наименьших квадратов не потребовался. Напротив, его можно немедленно ввести сейчас (но формулы Гаусса для составления и решения нормальных уравнений и вычисления весов $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ останутся по-прежнему полезными).

Мы должны подчеркнуть, что ввиду своей сложности мемуар 1823 г., в отличие от первого мемуара 1809 г., почти никогда не описывался в учебниках или руководствах. Теперь же ввиду нашего замечания положение коренным образом изменилось. Можно предположить, что Гаусс фактически предложил два обоснования (мы же оставили только второе). Но почему он даже не намекнул на это? Мы можем только сослаться на двух авторов, Кронекера (Kronecker, 1901, S. 42) и Стюарта (Stewart, 1995, p. 235):

1. *Способ изложения в* [*Арифметических исследованиях* 1801 г.], *как и вообще в работах Гаусса, евклидов. Он формулирует и доказывает теоремы, причем тщательно уничтожает все следы хода своих мыслей, которые привели его к результатам. Эта догматическая форма наверняка явилась причиной того, что его труды так долго оставались непонятыми.*

2. *Гаусс может быть таким же загадочным для нас, каким он был для своих современников.*

После публикации *Арифметических исследований* Гаусс оказался одним из первых математиков (если не первейшим) в мире, а после появления *Теории движения* в 1809 г. — виднейшим астрономом. Ясно, что он морально не мог себе позволить никаких второсортных работ. Вот что он писал Ольберсу уже 30 июля 1806 г.: *Мой девиз — или Цезарь, или никто.*

Но он оставался *загадочным* за счет читателей, а по отношению к своему мемуару 1823 г. сам себя наказал.

Источники

S, G с последующим номером (например, **S, G,** 51) в библиографических описаниях и в основном тексте означает, что соответствующая публикация (если она труднодоступна) или ее перевод размещены на нашем сайте www.sheynin.de или в Google, Oscar Sheynin, Home под номером 51.

Гаусс К. Ф. (Gauss C. F.)

Гаусс К. Ф. Дополнение к Теории комбинаций наблюдений и т. д. [1828a, латин.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 59–88.

Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1.

Гаусс К. Ф. Определение точности наблюдений [1816, нем.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 121–128.

Гаусс К. Ф. Теория движения и т. д. [1809, латин.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 89–109.

Гаусс К. Ф. Теория комбинаций наблюдений и т. д., ч. 1 и 2 [1823b, латин.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 17–57 (англ. перевод: Stewart (1995).)

Гаусс К. Ф. Теория комбинаций наблюдений и т. д., ч. 1, авторское сообщение [1821, нем.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 41–144.

Гаусс К. Ф. Теория комбинаций наблюдений и т. д., ч. 2, авторское сообщение [1823a, нем.] // *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М., 1957. Т. 1. С. 144–147.

Gauss C. F. [Переписка с Бесселем (1880), Ольберсом (1909), Герлингом и Шумахером (1927)] (перепечатка: Werke, Ergänzungsreihe. Bd. 1. 1975; Bd. 4. 1976; Bd. 3. 1975; Bd. 5. 1975).

Gauss C. F. Bestimmung des Breitenunterschied zwischen den Sternwarte von Göttingen und Altona [1828b] // *Gauss C. F.* Werke. 1903. Bd. 9. S. 5–64. S, G, 70.

Gauss C. F. Méthode des moindrescarrés [1855]. Paris, 1870–1929, Werke. Göttingen, 1870–1929. Bd. 1–12 (перепечатка: Hildesheim, 1973–1981). Сокращенное обозначение томов: Werke, W-i; Ergänzungsreihe, W/Erg.

Другие авторы

Ал-Хазини. Книга весов мудрости // Научное наследство. М., 1983. Т. 6. С. 15–140.

Бернштейн С. Н. Современное состояние теории вероятностей и ее применений [1928] // *Бернштейн С. Н.* Собр. соч. М., 1964. Т. 4. С. 217–232.

Бессель Ф. В. Исследование о вероятности ошибок наблюдения [1838, нем.] // *Бессель Ф. В.* Избранные геодезические сочинения. М., 1961.

Борткевич В. И. Критическое рассмотрение некоторых вопросов теории статистики [1894–1896, нем.] // О теории дисперсии / ред. Н. С. Четвериков. М., 1968. С. 55–137.

Борткевич В. И., *Чупров А. А.* Переписка 1895–1926. Берлин, 2005. **S, G,** 9.

Джунь И. В. Неклассическая теория погрешностей измерений. Ровно, 2015.

Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и т. д. М., 1947.

Кауфман А. А. Теория и методы статистики. М., 1922.

Колмогоров А. Н. К обоснованию метода наименьших квадратов // Успехи математических наук. 1946. Т. 1. № 1. С. 57–71.

Колмогоров А. Н., *Петров А. А.*, *Смирнов Ю. М.* Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов // Изв. АН СССР. Сер. математич. 1947. Т. 11. С. 561– 566.

Крамер Г. Математические методы статистики [1946, англ.]. М., 1948.

Мальцев А. И. Замечание к работе Колмогоров и др. // Изв. АН СССР. Сер. математич. 1947. Т. 11. С. 567–578.

Марков А. А. Закон больших чисел и способ наименьших квадратов [1899] // *Марков А. А.* Избранные труды. М.; Л., 1951. С. 231–251.

Марков А. А. Избранные труды. М., 1951.

Марков А. А. Исчисление вероятностей. Посмертное издание. М., 1924 (предыдущие издания: 1900, 1908, 1913).

Цингер В. Я. Способ наименьших квадратов: дис. на степ. магистра мат. наук. М.: Унив. тип., 1862.

Чебышев П. Л. Теория вероятностей [1879–1880, лекции]. М.; Л., 1936 (более сотни математических опечаток).

Шейнин О. Б. История теории ошибок. Берлин, 2007. **S, G,** 25.

Шейнин О. Б. Математическая обработка наблюдений у Маркова // Историко-математические исследования. 2009. Вып. 13 (48). С. 110–128.

Шейнин О. Б. Теория вероятностей. Исторический очерк. Берлин, 2013. **S, G,** 11.

Шейнин О. Б. Статистика. Ее история и суть // Финансы и бизнес. 2016. № 4. С. 104–118.

Barnett V., *Lewis T.* Outliers in Statistical data [1978]. Chichester, 1984.

Bertrand J. Sur la méthode des moindrescárres // C. r. Acad. Sci. Paris. 1855. T. 40. P. 1190–1192.

*Bertrand J.*Calcul des probabilités. Paris, 1888 (последующие издания 1907 и New York, 1970, 1972).

Bessel F. W. Fundamenta astronomiae. Königsberg, 1818 (выдержки на нем. яз. см: *Schneider I.* Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie... Darmstadt, 1988).

Bessel F. W. Über den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie [зачитано 1832] // *Bessel F. W.* Populäre Vorlesungen. Hamburg, 1848. S. 1–33.

Chatterjee S. K. Statistical Thought: a Perspective and History. Oxford, 2003.

Czuber E. Zur Kritikeiner Gauss'schen Formel // Monatsh. Math. Phys. 1891. Bd. 2. S. 459–464.

David F. N., *Neyman J.* Extension of the Markoff Theorem on Least Squares // Stat. Res. Mem. 1938. Vol. 2. P. 105–117.

Dodge Y. The Oxford Dictionary of Statistical Terms. Oxford, 2003.

Eddington A. S. Notes on the Method of Least Squares // Proc. Phys. Soc. 1933. Vol. 45. P. 271–287.

Eisenhart C. Gauss // Intern. Enc. of Statistics / ed. by W. Kruskal, J. Tanur. New York, 1978. Vol. 1. P. 378–386.

Eisenhart C. Realistic Evaluation of the Precision and Accuracy of Instrument Calibration Systems [1963] // Precision Measurement and Calibration. Sel. Nat. Bureau Standards Stat. Concepts and Procedures / ed. by H. H. Ku. NBS Sp. Publ. N 300. Vol. 1. Washington, 1969. P. 21–47.

Eisenhart C. The Meaning of least in least squares // Journal Wash. Acad. Sci. 1964. Vol. 54. P. 24–33 (также в: Precision Measurement and Calibration. Sel. Nat. Bureau Standards Stat. Concepts and Procedures / ed. by H. H. Ku. NBS Sp. Publ. N 300. Vol. 1. Washington, 1969. P. 265–274).

Fisher R. A. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics // Phil. Trans. Roy. Soc. 1922. Vol. A222. P. 309–368.

Fisher R. A. Statistical Methods for Research Workers [1925] // *Fisher R. A.* Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference. Oxford, 1990 (перепечатка трех сочинений, каждое со своей пагинацией; книга 1925 г.; перепечатана с изд. 1973 г.; она же переведена с изд. 1934 г.: *Фишер Р. А.* Статистические методы для исследователей. М., 1958).

Fourier J. B. J. Sur les resultants moyens [1826] // *Fourier J. B. J.* Oeuvres. T. 2. Paris, 1890. P. 525–545.

Gerardy T. Die Anfänge von Gauss' geodätische Tätigkeit // Zeitschrift f. Vermessungswesen. 1977. Bd. 102. S. 1–20.

Grafarend E., *Harland P.* Optimale Design geodätische Netze // Deutsche geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss. Bd. A74. München, 1973.

Hald A. History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713–1935. Copenhagen, 2004.

Hald A. History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. New York, 1998.

Helmert F. R. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig, 1872 (последующие издания: 1907, 1924; неполный пер. с издания 1907 г.: *Helmert F. R.* Уравновешивание по способу наименьших квадратов и т. д. М., 1914).

Helmert F. R. Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie // Zeitschrift Math. Phys. 1868. Bd. 13. S. 73–120, 163–186.

Helmert F. R. Zur Ableitung der Formel von Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit // Sitz. Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1904. Hlbbd. 1. S. 950–964 (перепечатка: Akademie-Verträge. Frankfurt/Main, 1993. S. 189–208; краткий вариант: Zeitschrift f. Vermessungswesen. 1904. Bd. 33. S. 577–587).

Ivory J. On the Method of Least Squares. London, Edinb. and Dublin Phil. Mag. 1825. Vol. 65. P. 1–10, 81–88, 161–168.

Kapteyn J. C. Definition of the Correlation Coefficient // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1912. Vol. 72. P. 518–525.

Kepler J. New Astronomy [1609, латин.]. Cambridge, 1992 (переводчик W. Donahue).

Kronecker L. Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig, 1901. Bd. 1.

Ku H. H. Statistical Concepts in Metrology [1967] // Precision Measurement and Calibration. Sel. Nat. Bureau Standards Stat. Concepts and Procedures / ed. by H. H. Ku. NBS Sp. Publ. N 300. Vol. 1. Washington, 1969. P. 296–310.

Lambert J. H. Anmerkungen und Zusätze zur praktischen Geometrie // *Lambert J. H.* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik etc. Berlin, 1765. Tl. 1. S. 1–313.

Lambert J. H. Photometria [1760, латин.]. Augsburg, 1760 (в немецком переводе раздел о математической обработке измерений был выпущен как устаревший!).

Laplace P.-S. Théorie analytique des probabilities [1812] // *Laplace P.-S.* Oeuvr. Compl. Paris, 1886. T. 7.

Legendre A. M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris, 1805.

Lehman E. L. A General Concept of Unbiasedness // Annals Math. Stat. 1951. Vol. 22. P. 587–592.

Lévy P. Calcul des probabilités. Paris, 1925.

Maennchen Ph. Gauss als Zahlenrechner, 1918. // Gauss W-10. 1930. Tl. 2. Abt. 6 (отдельная пагинация).

Neyman J. On two Different Aspects of the Representative Method // Journal Roy. Stat. Soc. 1934. Vol. 97. P. 558–625 (в книге: *Neyman J.* Selection of Early Statistical Papers. Berkeley, 1967. P. 98–141).

Neyman J. Lectures and Conferences on Math. Statistics and Probability [1938]. Washington, 1952.

Olbers W. Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwans // Zeitschrift f. Astron. u. verw. Wiss. 1816. Bd. 2. S. 181–198.

Pearson K. Notes on the History of Correlation // Biometrika. 1920. Vol. 55. P. 459–467 (перепечатка: Studies in the History of Statistics and Probability / ed. by E. S. Pearson, M. G. Kendall. London, 1970. P. 185–205).

Pearson K. Résumé analytique [1921] [собственных работ] // Math. Heritage of H. Poincaré / ed. by F. E. Browder. Proc. Symp. Indiana Univ. Providence, Rhode Island, 1980. P. 257–357.

Poincaré H. Calcul des probabilities. Paris, 1896 (русский перевод: *Пуанкаре А.* Теория вероятностей. Ижевск, 1999).

Pukelsheim F. Optimal Design of Experiments. New York, 1993.

Sartorius von Waltershausen W. Gauss zum Gedächtnis [1856]. Wiesbaden, 1965.

Schmeidler F. Leben und Werke des Königsberger Astronomen F. W. Bessel. Kalkheim T., 1984.

Schreiber O. Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen // Zeitschrift f. Vermessungswesen. 1879. Bd. 8. S. 97–149.

Seal H. L. The Historical Development of the Gauss Linear Model // Biometrika. 1967. Vol. 54. P. 1–24 (перепечатка: Studies in the History of Statistics and Probability / ed. by E. S. Pearson, M.G. Kendoll. London, 1970. P. 207–230).

Sheynin O. Bessel: Some Remarks on His Work // Hist. Scientiarum. 2000. Vol. 10. P. 77–83. **S, G**, 29.

Sheynin O. Bertrand's Work on Probability // Arch. Hist. Ex. Sci. 1994. Vol. 48. P. 155–199.

Sheynin O. Density Curves in the Theory of Errors // Arch. Hist. Ex. Sci. 1995. Vol. 49. P. 163–196.

Sheynin O. Gauss and the theory of errors // Arch. Hist. Ex. Sci. 1979. Vol. 20. P. 21–72. **S, G,** 47.

Sheynin O. Newcomb as a Statistician // Hist. Scientiarum. 2002. Vol. 12. P. 142–167.

Sprott D. A. Gauss' contribution to statistics // Hist. Math. 1978. Vol. 5. P. 183–203.

Stewart G. W. [Перевод мемуара Гаусса (1823b) на английский язык с Послесловием] (P. 207–241). Philadelphia, 1995.

Stigler S. M. History of Statistics. Cambridge, Mass., 1986.

Stigler S. M. Statistics on the Table. Cambridge, Mass., 1999.

Struve L. Bestimmung der Konstante der Präzession etc. // Mém. Acad. Imp. Sci. St. Pétersburg. Sér. 7. 1887. T. 35. N 3 (отдельная пагинация).

Studies in the History of Statistics and Probability / ed. by E. S. Pearson, M. G. Kendall. London, 1970.

Truesdell C. An Idiot's Fugitive Essays in Science [1977]. New York, 1984.

Zach F. X. von Sur le dégre du méridien // Mém. Acad. Imp. Sci., Litérature, Beaux-Arts Turin pour 1811–1812. Sci. math. et phys. 1813. P. 81–216.