ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ

М. В. Михайлов
канд. экон. наук, старший преподаватель кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета

Т. Н. Первозванская
канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербург

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСОМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЦЕЛЕВОГО ДЕНЕЖНОГО ОСТАТКА ФИРМЫ

Введение

Определение минимального уровня денежного остатка (ДО) фирмы — одна из основных задач финансового менеджмента в краткосрочной перспективе. От качества решения этой задачи во многом зависит, получит компания дополнительный доход или понесет убытки. Денежные средства предприятия обычно определяются в форме наличности на кассе и в форме расчетных счетов в коммерческих банках. Наличие ненулевого ДО на предприятии диктуется текущей производственной необходимостью оплачивать расходы по приобретению ресурсов, выплате заработной платы персоналу, выполнения налогового законодательства и т. д. В успешно функционирующей компании всегда возникают суммы денежных средств, которые временно свободны и в текущий момент времени непосредственно не востребованы для обслуживания нужд предприятия. Эти средства почти не приносят доход. Более того, за хранение денег предприятие может нести расходы. Как правило, временно свободные средства аккумулируются в формах, которые могут принести доход, например, облигации, акции, банковские депозиты и т. д. Разные формы размещения временно свободных денежных средств могут приносить доход, размер которого связывается с ограничениями на возможность обратной конвертации, т. е. обратного перевода в денежную форму. Обычно высоколиквидные активы приносят меньший доход, чем активы, реализация которых требует более длительного времени. Рыночные условия, в которых функционирует фирма, диктуют и другие ограничения, и особенности. Например, существуют различные риски невозврата денежных средств в срок или возникает необходимость возврата денежных средств до договорного срока, что влияет на доходность денежных вложений. Таким образом, задача управления денежными средствами предприятия — это комплексная проблема, связанная с необходимостью достижения многих целей в условиях необходимости выполнения многих ограничений.

Первые публикации на эту тему появились в середине прошлого века. В 1952 г. Бомол (в русскоязычной литературе часто используется написание Баумоль) в своей статье (Baumol, 1952) впервые предложил простую одноуровневую модель управления денежным остатком. В 1966 г. Миллер и Орр (Miller, Orr, 1966) предложили двухуровневую модель, которая стала классической и вошла практически во все учебники по финансовому менеджменту, например, одно из последних изданий (Brigham, Ehrhardt, 2011). В последующем появились работы, в которых развивались идеи вышеуказанных авторов. В основном предлагались модели, где использовалось большее количество возможных активов для управления (Mullins, Homonoff, 1976). Относительная простота предлагаемых моделей способствовала их широкому использованию в практике краткосрочного финансового планирования.

В основе большинства работ, связанных с проблемами управления денежным остатком, лежат модели теории управления запасами, исходя из предположения, что запас денежных средств можно рассматривать как запас обычного продукта. Соответственно, наработанные модели управления запасами можно применять для управления денежным остатком. В частности, задача управления денежным остатком ставится в рамках финансового планирования финансовых организаций, например, коммерческих банков (Halpern, Orgler, 1975).

В задачах управления запасами используется два критерия. Первый – минимум ожидаемых издержек (или максимум ожидаемой прибыли) или уровень ликвидности, т. е. способность своевременно гасить свои обязательства. Второй критерий более характерен для финансовых фирм (банков) и выражается как вероятность отсутствия дефицита. Оба эти критерия связаны: значение уровня, найденного согласно первому критерию, соответствует некоторой вероятности отсутствия дефицита, определяемой через удельные издержки, формирующие первый критерий, т. е. экономически целесообразной (Первозванский, Первозванская, 1983; Первозванская, 1984). Если фирму (особенно банк) не устраивает этот уровень ликвидности (соответствующий минимальным издержкам), она может изменить издержки, отталкиваясь от заданного (желаемого) уровня ликвидности.

Постановка задачи

Для определения политики управления будем использовать только один класс моделей управления запасом: класс одноуровневых моделей. Для определенности будем рассматривать процесс управления запасом в течение периода, состоящего из n этапов. В начале каждого i этапа возможно пополнение запаса за счет поставки, размер $q_n \geqslant 0$ которого определяется в соответствии с выбранной политикой управления и значениями ее параметров. Спрос $r_n \geqslant 0$ предъявляется также в начале каждого этапа после принятия решения о поставке, т. е. размер спроса неизвестен до принятия решения о поставке. Величина запаса x_i, оставшегося после удовлетворения спроса, хранится в течение i этапа и будет использоваться для удовлетворения спроса на следующем этапе. Формально размер хранимого запаса на этапе может быть описан следующим рекуррентным соотношением:

$$x_n = x_{n-1} + q_n - r_n \tag{1}$$

Спрос задается с точностью до случайной величины $\tilde{r}$, для которой известна функция плотности распределения вероятности $f_n(n)$. На каждом этапе спрос предполагается независимой случайной величиной.

В зависимости от конкретной реализации спроса на этапе, имеющегося запаса и размера поставки размер хранимого запаса может принимать и отрицательное значение. Будем считать, что это спрос, удовлетворение которого будет осуществляться на следующих этапах.

Управлением будем считать размер поставок на каждом этапе. Параметрами этого управления является уровень запаса на каждом этапе. При принятии решения будем принимать во внимание издержки, возникающие в результате осуществления управления. Обычно определяют три типа издержек: издержки хранения запаса, издержки дефицита запаса при удовлетворении спроса и издержки осуществления поставки:

$\varphi_n^{(h)} = \begin{cases} \varphi_n^{(h)}(x), x \geq 0 \\ 0, \qquad x < 0 \end{cases}$ – функция издержек хранения на этапе n,

$$\varphi_n^{(c)} = \begin{cases} \varphi_n^{(c)}(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ – функция издержек поставки на этапе n,

$$\varphi_n^{(p)} = \begin{cases} \varphi_n^{(p)}(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$ – функция издержек дефицита на этапе n.

Тогда общие издержки на этапе n составят $\Phi_n(x_n, q_n) = \varphi_n^{(h)}(x_n) + \varphi_n^{(c)}(q_n) + \varphi_n^{(p)}(x_n)$, а общие издержки управления $Q = \{q_n\}_{n}^{N} = 1$, $q_n \geqslant 0$ за весь период управления – $\Phi(x_0, Q) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x_n, q_n)$. В качестве показателя критерия оценивания управления будем использовать значение общих издержек за весь период управления. Этот показатель является случайной величиной, так как зависит от стохастического спроса, поэтому нас будет интересовать его оценка в форме среднего. Необходимо определить управление с минимальными общими издержками.

Для ряда простейших случаев, когда используются предпосылки:

(1) линейная форма функций издержек управления,

(2) спрос задается случайной величиной с некоторыми «классическими» (нормальным, показательным) распределениями,

(3) при постоянстве параметров издержек и спроса в течение всего периода управления, найдены аналитические решения в функциональной форме, с которыми можно ознакомиться в ряде учебных пособий, например, (Первозванская, Первозванский, 1983; Рыжиков, 2001) и др.

Линейная форма аппроксимации издержек управления на практике не всегда является достаточной. Часто даже в случае линейности функций издержек их параметры зависят от объема запаса, размера поставки. На рис. 1 приведен пример кусочной линейной функции и ее аппроксимации, форма которой часто используется на практике для оценивания издержек хранения, поставки.

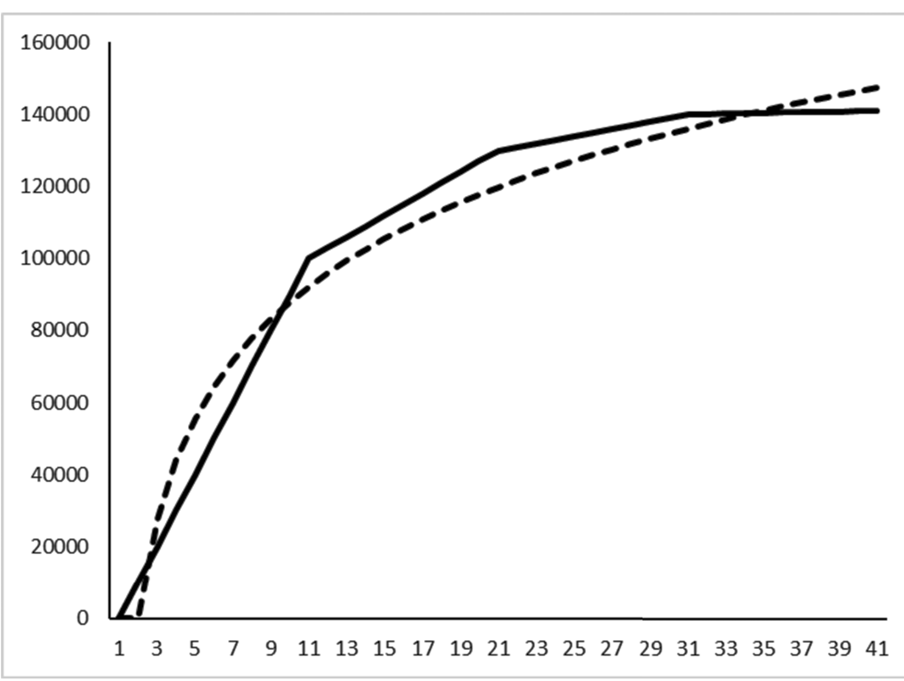

Рис. 1. Зависимость издержек хранения от размера запаса, пример

В общем случае функция издержек может задаваться табличным способом. Табличный способ описания функций, включая функции распределения случайной величины, имеет преимущества при описании особенностей задания функций издержек, реализации спроса на практике (в сравнении с известными теоретическими распределениями).

Условие постоянства параметров функций издержек и спроса в течение всего периода управления является трудновыполнимым, даже в краткосрочном управлении запасом. Особенно это актуально для спроса, параметры которого изменяются под воздействием множества факторов, изменяющегося с течением времени.

На практике при невыполнении хотя бы одной из предпосылок (1)–(3) необходимо либо корректировать известное решение с учетом нарушений предпосылок, либо искать другое решение, исходя из более общих предположений. Применение имитационных форм известных моделей управления запасом, возможно, с некоторыми изменениями и дополнениями, необходимыми для особенностей практической реализации имитационных моделей, позволяет получать результаты, пригодные для практического применения в управлении запасом, в условиях, когда нет аналитических решений, либо для корректировки аналитических решений (для частных случаев) в условиях нарушения модельных предпосылок.

Особенности применения имитационных моделей

В данной работе предлагается использовать имитационный подход для решения задачи нахождения оптимального уровня запаса при использовании политики одного уровня в условиях стохастического спроса, когда форма и параметры функций издержек и спроса могут изменяться в течение периода управления[1].

В отличие от других типов моделирования имитационная модель непосредственно не решает вопрос нахождения оптимального управления. Она только описывает процесс управления в средствах, позволяющих осуществить выбранное управление до его применения на практике. Модель заменяет процесс управления его имитацией. На имитационной модели можно многократно опробовать различные варианты управления, определить положительные и отрицательные следствия их применения. И это возможно без затрат, необходимых при проведении таких экспериментов на реальной системе. Следует отметить, что в случае наличия аналитических методов нахождения оптимального управления применение имитационной модели теряет смысл, так как имитационное моделирование требует достаточно больших материальных и временных затрат. Как правило, аналитические решения имеют значение в условиях соблюдения некоторых ограничений и допущений, иногда достаточно жестких для практического применения. Их нарушения приводят к тому, что оптимальные решения перестают быть таковыми.

Роль имитационной модели в решении задачи нахождения управления запасом с минимальными издержками заключается в тестировании управлений из множества известных допустимых управлений не на практике, а на имитационной модели. В процессе проведения экспериментов для каждого управления рассчитывается значение показателя по выбранному критерию (общие издержки управления), по которому определяется оптимальное управление.

Имитационная модель может быть представлена как форма реализации некоторой функции, где для каждого значения аргумента-управления (на входе модели) ставится в соответствие значение, рассчитываемое по заданному алгоритму (выход).

[1] Имитационная модель позволяет учитывать формы функций издержек, отличных от линейных, включая табличную форму. Табличная форма может быть использована и для задания функций распределения спроса.

Это своего рода табличное задание функции. Из практических соображений множество возможных допустимых значений аргумента функции должно быть счетным и ограниченным. Как частный случай, достаточно на вход имитационной модели подать только одно значение – уровень запаса, имеющийся перед началом применения политики управления (на начало этапа 1); такое применение имитационной модели характерно, когда задача определения политики управления запасом решается для конкретной фирмы на конкретный период времени, когда известны имеющийся запас, прогнозные значения издержек хранения, издержек поставки, издержек дефицита и параметры спроса. В исследовательских целях интерес представляют и свойства этой функции, изучение которых возможно при наличии значений функции при разных значениях аргументов.

Основным недостатком применения имитационной модели управления запасом являются значительные временные издержки, которые связаны с необходимостью перебора огромного количества вариантов управления. Каждый вариант управления «обкатывается» на всевозможных вариантах реализации спроса для расчета значений показателя критерия. Эта проблема носит название «проклятие размерности», введенное математиком Р. Беллманом. Частично эта проблема решается программно-аппаратными средствами компьютерных технологий с использованием параллельных вычислений. Один из математических подходов к решению этой проблемы реализован на идеях динамического программирования, впервые изложенных в (Bellman, Dreyfus, 1962). К сожалению, на данном этапе нет кардинальных подходов для решения проблемы «проклятия размерности», кроме подбора приемлемых значений параметров имитационной модели.

Одноуровневая имитационная модель управления запасом

Кратко рассмотрим суть предлагаемой имитационной модели.

В соответствии с идеями Р. Беллмана весь N шаговый процесс, начинающийся с состояния x, в котором система находится до осуществления процесса, делится на две части: часть I – первый шаг процесса и часть II – оставшиеся $N - 1$ шагов. Согласно так называемому принципу оптимальности Беллмана, каким бы ни было решение, принятое на первом шаге, на оставшихся шагах процесса надо действовать оптимальным образом.

Процесс управления можно рассматривать как последовательность этапов от 1 до N и как последовательность частей процесса управления, состоящей из части I (один этап) и части II (оставшиеся этапы). По построению издержки части II минимальны[1], независимо от управления части I.

Рассмотрим процесс управления, состоящего из одного этапа N. Часть I этого процесса – это этап N. Оставшихся этапов нет, поэтому считаем, что издержки управления в части II минимальны абсолютно, т. е. равны нулю. Тогда минимальные (в сумме по частям I и II) издержки определяются минимальными издержками этапа N. Эти минимальные издержки определяются выбором соответствующего управления. В случае, когда дальше этап N рассматривается как оставшиеся этапы (часть II), то эти издержки рассматриваются как издержки части II, и они минимальны, и известно управление, на котором они достигаются. Издержки управления зависят не только от выбранного управления, но и от запаса на начало этого этапа. В общем случае необходимо определить минимальные издержки

[1] Построение приводится ниже.

(уровень запаса, на котором достигаются эти минимальные издержки) для любого допустимого запаса на входе этого этапа[1].

Рассмотрим процесс управления запасом, состоящим из двух этапов, начиная с этапа $n = N - 1$. Здесь нужно подобрать такое управление в части I, чтобы суммарные по обеим частям издержки управления были минимальными. Величина минимальных издержек (и управления с этими издержками) в части II (начиная с этапа N уже определена. Полученные издержки выбранного этапа n являются минимальными издержками всех этапов управления начиная с этого этапа. Для этого этапа необходимо определить минимальные издержки управления для любого допустимого запаса на входе этого этапа аналогично предыдущему частному случаю. Дальше полученные издержки рассматриваются как издержки части II управления для управления начиная с этапа $n = N - 2$.

Таким образом, продвигаясь от этапа N к этапу 1, для каждого этапа рекуррентно определяются функции издержек для управления на этапах, начиная рассматриваемым и заканчивая этапом N. Одновременно определяются управления на этапах, на которых достигаются минимальные издержки. Следует отметить, что минимальные издержки управления, полученные для процесса, где в качестве части I рассматривается этап 1, интерпретируются как минимальные издержки управления на всех этапах периода управления.

На величину запаса x (и издержки управления) оказывает влияние не только выбираемое управление q, но и спрос r. Спрос обычно не детерминирован и описывается случайной величиной. Поэтому для оценивания издержек управления используется показатель среднего (математическое ожидание M). Будем называть их среднеожидаемые издержки управления.

Пусть $B_n(x)$ минимальные общие издержки управления, состоящие из издержек части I (этап n), части II (этапы $n + 1$, $n + 2$, ..., N), где x запас, образовавшийся на начало этапа n. По построению это минимальные издержки управления на этапах n, $n + 1$, $n + 2$, ..., N. $B_1(x)$ – минимальные общие издержки на всех этапах управления. Функцию $B_n(x)$ будем называть функцией Беллмана.

Для $n = N$ минимальные общие издержки управления составят в среднем по возможному спросу:

$$B_N(x) = \min_{q_N \geqslant 0} (M(\Phi_N(x + q_N - r_N, q_N)) + 0), \tag{2}$$

Рассмотрим процесс управления на этапах $N - 1$ и N, т. е. случай $n = N - 1$. Здесь издержки части 1 определяются значением $\Phi_n(x + q_n - r_n, q_{n\_})$, части II – $B_{n+1}(x)$, а минимальные общие издержки управления для этапов $N - 1$, N, согласно принципу оптимальности Беллмана:

$$B_n(x) = \min_{q_n \geqslant 0} M(\Phi_n(x + q_n - r_n, q_{n\_}) + B_{n+1}(x + q_n - r_n)), \tag{3}$$

Аналогично можем построить показатель (3) минимальных общих издержек для любого другого этапа $1 \leqslant n < N$ управления запасом, который включает в себя общие издержки текущего этапа n и минимальные общие издержки всех последующих этапов. Будущие издержки (следующих этапов) обычно учитываются в дисконтированной форме:

$$B_n(x) = \min_{q_n \geqslant 0} M(\Phi_n(x + q_n - r_n, q_{n\_}) + \alpha B_{n+1}(x + q_n - r_n)), \tag{4}$$

где α – коэффициент дисконтирования.

[1] Это функция издержек управления на этапе управления в зависимости от запаса на начало этапа. В нашем случае определение этой функции осуществляете табличным способом.

Функция издержек поставки не зависит от величины спроса, поэтому можно вынести за знак математического ожидания. Обозначив сумму средних издержек хранения и средних издержек дефицита через

$$L_n(x, q_n) = M(\varphi_n^{(h)}(x + q_n - r_n)) + M(\varphi_n^{(p)}(x + q_n - r_n)),$$

выражение (4) можно переписать следующим образом:

$$B_n(x) = \min_{q_n \geqslant 0} (\varphi_n^{(c)}(q_n) + L_n(x, q_n) + \alpha M(B_{n+1}(x + q_n - r_n))). \tag{5}$$

При определении политики одного уровня вместо управления $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$, $q_i \geqslant 0$ удобно рассматривать эквивалентное управление $S = \{s_n\}_{n=1}^n$, $s_n \geqslant 0$, где $s_n = x_{n-1} + q_n$. Тогда выражение (2) и (5) может быть записано в следующей рекуррентной форме:

$$\begin{cases} B_N(x) = \min\limits_{s_N \geqslant 0} (\varphi_N^{(c)}(s_N - x) + L_N(x, s_N)), \\ B_n(x) = \min\limits_{s_n \geqslant 0} (\varphi_n^{(c)}(s_n - x) + L_n(x, s_n) + \alpha M(B_{n+1}(s_n - r_n))),\ n = 1 \ldots N-1. \end{cases} \tag{6}$$

Функция Беллмана представляет собой минимальную сумму издержек поставки, среднеожидаемых (в зависимости от варианта спроса r_n) издержек хранения и дефицита этапа n и среднеожидаемых (в зависимости от варианта спроса r_n) минимальных издержек будущих этапов. Это минимальные среднеожидаемые издержки управления в периоде, включающем в себя этап n и все последующие этапы.

Решение системы рекуррентных уравнений (6) представляет собой оптимальное управление $S^* = \{s_n^*\}_{n=1}^N$, $s_n^* \geqslant 0$, при котором для известного начального значения запаса x будет достигнуто значение $B_1(x)$, минимальное значение издержек управления в течение рассматриваемого периода управления.

Специфика построения функции Беллмана для определения оптимального управления требует рассмотрения (перебора) всевозможных вариантов спроса на каждом этапе для определения среднеожидаемых издержек. При прямой практической реализации имитационной модели это сделать невозможно. Обычно для выбора конкретной реализации спроса строятся датчики случайных чисел с необходимыми свойствами. Качество этих датчиков сильно зависит от используемой теории. В любом случае это датчики псевдослучайных чисел, и, как правило, для получения маловероятной реализации случайной величины требуется провести очень длительную серию испытаний. Другим способом «перебрать все варианты» является генерация ограниченного множества допустимых значений за счет «дискретизации», задавая шаг перебора значений. Шаг может быть не обязательно постоянным. В табл. 1 приведен пример такой дискретизации множества вариантов спроса. Увеличивая шаг дискретизации, что не есть хорошо с точки зрения поставленной задачи, можно уменьшить проблему «проклятия размерности».

Множество возможных (допустимых, рассматриваемых) реализаций спроса состоит из $L = 51$ вариантов (с шагом дискретизации $\frac{r_{max} - r_{min}}{L-1}$)[1]. Столбец 3 табл. 1 содержит значения функции распределения случайной величины r ($F_l = F(r_l) = P(r \leqslant r_l)$, $l = 1$, $F(r_l) = 1$). Столбец 2 табл. 1 содержит значение $f_l = F_l - F_{l-1}$, вероятность спроса из множества (r_{l-1}, r_l). Значение f_l может интерпретироваться как вероятность варианта спроса r_l, которым оценивается множество (r_{l-1}, r_l).

[1] Это лишь пример определения спроса на одном этапе управления с условными значениями. Механизм определения значений этой таблицы здесь не является определяющим.

Таблица 1

Множество допустимых (рассматриваемых) значений спроса на одном этапе

№	Спрос	Вероятность, %		
	r	f	F	$1-F$
1	7,3	0,10	0,10	99,90
2	11,0	0,05	0,15	99,85
3	14,7	0,07	0,22	99,78
4	18,4	0,10	0,33	99,67
5	22,1	0,14	0,47	99,53
24	92,6	4,70	40,24	59,76
25	96,3	4,84	45,08	54,92
26	100,0	4,92	50,00	50,00
27	103,9	5,12	55,12	44,88
28	107,7	5,04	60,16	39,84
29	111,6	4,87	65,04	34,96
30	115,5	4,64	69,67	30,33
31	119,3	4,34	74,01	25,99
32	123,2	4,00	78,01	21,99
33	127,0	3,62	81,63	18,37
34	130,9	3,22	84,85	15,15
35	134,8	2,82	87,67	12,33
36	138,6	2,43	90,11	9,89
37	142,5	2,06	92,17	7,83
38	146,4	1,72	93,88	6,12
39	150,2	1,41	95,29	4,71
40	154,1	1,14	96,43	3,57
48	185,0	0,11	99,77	0,23
49	188,8	0,08	99,85	0,15
50	192,7	0,05	99,90	0,10
51	196,6	0,10	100,00	0,00

Значение F_l может интерпретироваться как вероятность отсутствия дефицита при условии, что уровень запаса $s = r_l$. Значения столбца 4 можно интерпретировать как вероятность дефицита при условии, что уровень запаса $s = r_l$.

В общем случае выбор вариантов спроса и определение (выбор) вероятностей их осуществления есть важная ответственная работа экспертов. Множество вариантов реализации должно быть полным. Распределение вероятностей не обязательно может совпадать с известными классическими распределениями.

На каждом этапе управления, когда известно множество возможных значений спроса $\{r_{ln}\}_{l=1}^{L_n}$, для каждого из которых известна вероятность его реализации f_{ln} : $\Sigma_{l=1}^{L_n} f_{ln} = 1$. Тогда рассчитать слагаемые выражения (6) можно следующим образом:

среднеожидаемые издержки хранения и дефицита этапа

$$L_n(x, s_n) = \sum_{l=1}^{L_n} \varphi_n^{(h)}(s_n - r_{ln}) f_{jn} + \sum_{l=1}^{L_n} \varphi_n^{(p)}(s_n - r_{ln}) f_{ln}, \tag{7}$$

и среднеожидаемые полные издержки всех следующих этапов –

$$M\,(B_{n+1}(s_n - r_n) = \sum_{l=1}^{L_n} B_{n+1}(s_n - r_n) f_{ln}, \tag{8}$$

На рис. 2 представлена блок-схема расчета параметров политики одного уровня управления запасом с использованием функции Беллмана (6).

$\{s_i\}_{i=1}^{K}$ – множество допустимых (рассматриваемых) значений уровня запаса на любом этапе управления, задаваемое значением $s_{max} \geqslant s_i$, $i = 1\ldots K$, где K количество значений, которое используется для определения шага изменения допустимых значений s_i.

$\{x_i\}_{i=1}^{2K}$ – множество допустимых[1] (рассматриваемых) значений запаса на входе любого этапа управления.

Для каждого этапа функция Беллмана определяется в виде матрицы $B_{2K\times 3}$, где $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, $B_{i,3}$ – запас x_i на входе этапа, управление s_i^*, при котором среднеожидаемые общие издержки управления минимальны в периоде, начиная с этого этапа, и затраты $B(x_i)$ управления в периоде, начиная с этого этапа. Матрицу, содержащую описание функции Беллмана для всех этапов, будем называть матрицей Беллмана.

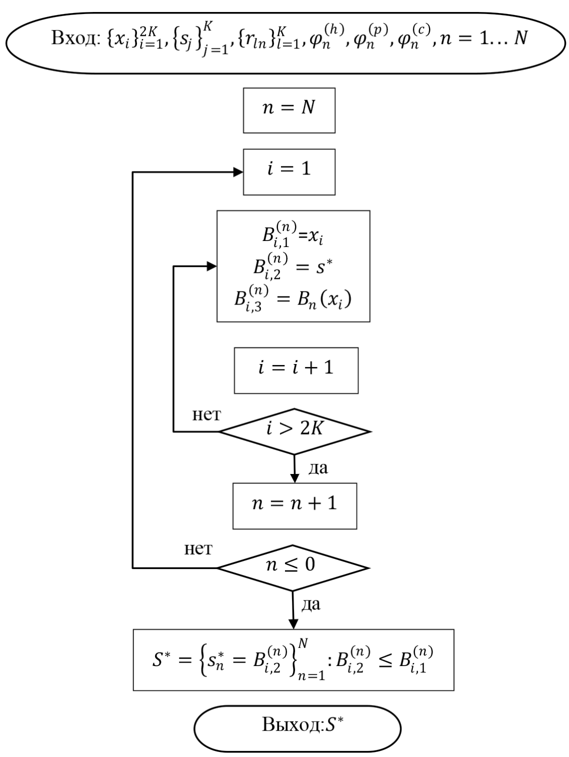

Рис. 2. Блок-схема построения матрицы Беллмана и определения параметров политики одного уровня управления запасом

[1] В модели управления запасом с отложенным спросом запас в начале этапа может принимать отрицательные значения, которые надо учитывать в множестве допустимых значений, поэтому используется увеличенная размерность.

Пример применения имитационной одноуровневой модели управления запасом

Будем рассматривать уровни запаса из множества допустимых значений, заданных максимальным значением, не превышающим 250, в заданном количестве значений 51.

Описание функций издержек приведено в табл. 2[1]. Для простоты будем считать, что эти функции постоянны для любого этапа периода управления.

Таблица 2

Функции издержек хранения, поставки дефицита

№	Запас	Издержки хранения	Поставка	Издержки поставки	Запас	Издержки дефицита
1	0	0	0	0	0	0
2	5	0	5	5	-5	0
3	10	15	10	13	-10	24
4	15	19	15	8	-15	23
5	20	18	20	26	-20	46
6	25	33	25	24	-25	58
7	30	30	30	37	-30	64
8	35	29	35	43	-35	64
9	40	49	40	45	-40	83
10	45	38	45	54	-45	86
11	50	49	50	50	-50	109
22	105	103	105	113	-105	210
33	160	168	160	162	-160	313
44	215	212	215	218	-215	436
55	270	268	270	276	-270	546
66	325	333	325	328	-325	645
77	380	377	380	385	-380	753
88	435	430	435	431	-435	861
99	490	499	490	486	-490	974
100	495	489	495	501	-495	995
101	500	496	500	500	-500	1009

В табл. 3 приведена функция Беллмана в табличной форме для этапа 7 ($n = N = 7$), значения которой рассчитываются по первой формуле (6). Первый столбец содержит значения множества допустимых значений запаса на входе этапа 7. Для каждого значения запаса последовательно применяются управления из заданного множества допустимых значений. Для каждого управления применяется спрос (все значения) на этапе (см. табл. 1) с соответствующими значениями вероятности с определением среднеожидаемых издержек управления. В соответствии с (6) для последнего этапа это

[1] Здесь и везде табличное описание функций (издержек, распределения, Беллмана) приводится в сокращенном виде, не для всех значений аргументов.

сумма среднеожидаемых издержек хранения, среднеожидаемых издержек дефицита и издержек поставки этого этапа. Среди всех управлений этапа выбирается управление с минимальными среднеожидаемыми общими издержками этапа. Третий столбец содержит значение функции Беллмана (6). Здесь это среднеожидаемые общие издержки управления на этапе 7 (последний этап).

Таблица 3

Функция Беллмана в табличной форме для 7-этапного процесса, фрагмент для последнего этапа

№	Этап 7		
	Запас на входе, *x*	**Уровень запаса, *s****	**Издержки управления, *B(x)***
1	-250	90	384
2	-245	90	379
3	-240	90	374
49	-10	90	144
50	-5	90	139
51	0	90	134
52	5	90	129
53	10	90	124
66	75	90	59
67	80	90	54
68	85	90	49
69	90	90	44
70	95	95	40
71	100	100	36
72	105	105	34
73	110	110	33
74	115	115	33
75	120	120	33
76	125	125	34
77	130	130	37
78	135	135	39
79	140	140	43
80	145	145	46
81	150	150	50
99	240	240	139
100	245	245	144
101	250	250	149

В табл. 4 приведен фрагмент матрицы Беллмана, содержащий функцию Беллмана в табличной форме для двух последних этапов. Для предпоследнего этапа 6 значения функции Беллмана рассчитываются по второй формуле (6). Здесь при определении издержек на этапе 6 используются предварительно рассчитанные издержки этапа 7.

Таблица 4

Функция Беллмана в табличной форме для 7-этапного процесса, фрагмент для двух последних этапов

№	Этап 6			Этап 7		
	Запас на входе, *x*	**Уровень запаса, *s****	**Издержки управления, *B(x)***	**Запас на входе, *x***	**Уровень запаса, *s****	**Издержки управления, *B(x)***
1	-250	115	520	-250	90	384
2	-245	115	515	-245	90	379
3	-240	115	510	-240	90	374
49	-10	115	280	-10	90	144
50	-5	115	275	-5	90	139
51	0	115	270	0	90	134
52	5	115	265	5	90	129
53	10	115	260	10	90	124
66	75	115	195	75	90	59
67	80	115	190	80	90	54
68	85	115	185	85	90	49
69	90	115	180	90	90	44
70	95	115	175	95	95	40
71	100	115	170	100	100	36
72	105	115	165	105	105	34
73	110	115	160	110	110	33
74	115	115	155	115	115	33
75	120	120	151	120	120	33
76	125	125	147	125	125	34
77	130	130	144	130	130	37
78	135	135	142	135	135	39
79	140	140	141	140	140	43
80	145	145	139	145	145	46
81	150	150	139	150	150	50
99	240	240	187	240	240	139
100	245	245	195	245	245	144
101	250	250	202	250	250	149

Здесь $B_i^{(6)}(x_i)$ – минимальные среднеожидаемые общие издержки управления на этапах 6 и 7. Для каждого рассматриваемого уровня запаса s. Они складываются из издержек поставки $s - x_i$ этапа 6, среднеожидаемых издержек хранения этапа 6, среднеожидаемых издержек дефицита этапа 6 и минимальных среднеожидаемых общих издержек этапа 7. Последние являются функцией Беллмана для этапа 7 $B^{(7)}$ $(s - r)$, взвешиваемые по вероятности спроса на этапе 6.

Таблица 5

Матрица Беллмана (фрагмент), содержащая функции Беллмана для трех первых этапов

№	Этап 1			Этап 2			Этап 3		
	Запас на входе, *x*	Уровень запаса, *s**	Издержки правления, *B(x)*	Запас на входе, *x*	Уровень запаса, *s**	Издержки управления, *B(x)*	Запас на входе, *x*	Уровень запаса, *s**	Издержки управления, *B(x)*
1	-250	115	1203	-250	115	1066	-250	115	930
2	-245	115	1198	-245	115	1061	-245	115	925
3	-240	115	1193	-240	115	1056	-240	115	920
49	-10	115	963	-10	115	826	-10	115	690
50	-5	115	958	-5	115	821	-5	115	685
51	0	115	953	0	115	816	0	115	680
52	5	115	948	5	115	811	5	115	675
53	10	115	943	10	115	806	10	115	670
66	75	115	878	75	115	741	75	115	605
67	80	115	873	80	115	736	80	115	600
68	85	115	868	85	115	731	85	115	595
69	90	115	863	90	115	726	90	115	590
70	95	115	858	95	115	721	95	115	585
71	100	115	853	100	115	716	100	115	580
72	105	115	848	105	115	711	105	115	575
73	110	115	843	110	115	706	110	115	570
74	115	115	838	115	115	701	115	115	565
75	120	120	833	120	120	697	120	120	560
76	125	125	830	125	125	693	125	125	557
77	130	130	827	130	130	690	130	130	554
78	135	135	824	135	135	688	135	135	552
79	140	140	823	140	140	686	140	140	550
80	145	145	821	145	145	685	145	145	549
81	150	150	821	150	150	684	150	150	548
99	240	240	833	240	240	697	240	240	560
100	245	245	836	245	245	700	245	245	563
101	250	250	839	250	250	703	250	250	566

В табл. 5 приведен фрагмент матрицы Беллмана (семь этапов) для первых трех этапов управления. Задавая запас на входе этапа 1, например, $x_1 = B_{51,1}^{(1)} = 0$, получаем уровень запаса $s_1^* = B_{51,2}^{(1)} = 115$, при котором минимальные среднеожидаемые общие издержки управления на всех этапах составят $B_{i,3}^{(1)} = 953$. Размер оптимальной поставки равен $q_1^* = B_{51,2}^{(1)} - B_{51,1}^{(1)} = 115$. При $x_1 = B_{74,1}^{(1)} = 115$ оптимальный уровень запаса $s_1^* = B_{74,2}^{(1)} = 115$ и размер оптимальной поставки $q_1^* = B_{74,2}^{(1)} - B_{74,1}^{(1)} = 0$. Начиная с варианта 74 запаса на входе этапа $x_1 = B_{74,1}^{(1)}$, выполняется равенство $s_1^* = x_1$. Это равенство указывает на отсутствие поставок в оптимальном управлении на этапе 1. Например, для варианта $x_1 = B_{80,1}^{(1)} = 145$ уровень запаса $s_1^* \leqslant B_{80,2}^{(1)} = 145$ будет оптимальным с минимальными среднеожидаемыми общими издержками процесса управления, начиная с этапа 1. Не умаляя общности, можно утверждать, что оптимальным управлением на этапе 1 является $s_1^* = 115$. Таким образом, для любого допустимого запаса на входе этапа 1 оптимальным управлением на этом этапе является значение $s_1^* = B_{74,2}^{(1)} = 115$.

Аналогичные рассуждения для любого этапа позволяют сформулировать следующее условие определения оптимальной политики управления в терминах функции Беллмана, определяемой в табличной форме:

$$s^* = \{s_n^*\}_{n=1}^{N} : s_n^* = B_{i^*,2}^{(n)},\ i^* = \min\left(i : B_{i,2}^{(n)} = B_{i,1}^{(?)}\right) \tag{9}$$

Задача определения и измерения издержек управления запасом – важная составляющая при выборе стратегии управления системой. Издержки, которые не зависят от применяемой стратегии, не следует учитывать. Мы абстрагируемся от издержек, свойственных запасу конкретного вида: аптекарские товары, краски, авиационные комплектующие, продовольствие и т. д., агрегируя их в три класса издержек: хранения, поставки, дефицита. Даже интерпретируя наличные денежные средства (остаток денежных средств) как запас, абстрагируясь от существенных качеств этого специфического запаса, мы не теряем основных свойств процесса управления. Предметом исследования является не сам запас, а процесс управления запасом. Все особенности конкретного запаса вкладываются в описание функций издержек. Для нас важны не сами издержки, но их количество, измеренное в денежном эквиваленте. При определении состава издержек и их измерении в денежном эквиваленте есть проблемы, которые больше или меньше для разных видов запаса. Но они, как правило, решаемы. Исключение составляют издержки дефицита. Размеры этих издержек сильно разнятся от того, что относить к этим издержкам. Например, издержками дефицита можно считать увеличение затрат функционирования, включая увеличение затрат на хранение, увеличение затрат на поставку, увеличение любых затрат, связанных с возникновением дефицита. К издержкам дефицита часто относят недополученную прибыль от клиента, ушедшего к конкуренту. Но как рассчитать недополученную прибыль от потенциального клиента? Или как рассчитать издержки от дефицита наличных денежных средств в коммерческом банке, если это привело к отзыву лицензии и банкротству банка?

В качестве инструмента оценивания издержек дефицита можно предложить функцию Беллмана (6). В общем случае, когда параметры функций издержек являются функциями запаса, функции издержек не линейны, функции издержек зависят от номера этапа управления, спрос на этапах управления определяется с точностью до случайной величины, предлагаемый инструмент в форме имитационной модели (7)–(8) позволит получить практические оценки функции издержек дефицита.

В табл. 6 представлены результаты проведения испытаний имитационной модели для разных вариантов соотношения издержек дефицита с другими типами издержек управления запаса. Издержки указаны в относительных единицах. Важны не абсолютные значения, а соотношения между отдельными видами издержек. Издержки хранения и поставки зафиксированы и неизменны для всех вариантов, изменяются только удельные издержки дефицита. Спрос, постоянный на всех этапах управления, задан табл. 3.

Для любого варианта издержек дефицита рассчитывается значение функции Беллмана (показатель минимальных среднеожидаемых общих издержек управления), которое достигается на найденном управлении (уровень запаса на каждом этапе). При неизменности параметров системы наблюдается неизменность управления на всех этапах, что соответствует теории в случае бесконечно шаговой модели. Исключение составляет этап 7 (последний этап), что объясняется тем, что после этого этапа нет спроса, нет издержек, нет ничего. Увеличение количества этапов приводит к аналогичной ситуации с последним, но другим этапом.

Таблица 6

Результаты серии испытаний имитационной модели при постоянном стохастическом спросе для разных вариантов издержек дефицита

	Тип затрат	**Варианты**							
1	Хранение, *b(h)*	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Поставка, *b(c)*	1	1	1	1	1	1	1	1
3	Дефицит, *b(p)*	2	3	4	5	6	8	11	15
	Уровень запаса на этапах								
4	Этап 1	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
5	Этап 2	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
6	Этап 3	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
7	Этап 4	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
8	Этап 5	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
9	Этап 6	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0	140,0	145,0	150,0
10	Этап 7	90,0	100,0	110,0	115,0	120,0	125,0	130,0	135,0
11	F(s), %	65	74	78	82	88	90	92	94
12	1 – F(s), %	35	26	22	18	12	10	8	6

Для каждого уровня запаса, используя интегральную функцию распределения вероятности спроса (столбец 4 табл. 1), можно определить вероятность отсутствия дефицита запаса для найденных значений политики управления (строка 12 табл. 6). Это вероятность спроса, не превышающего уровень запаса. Вероятность дефицита запаса – это показатель, который часто используется для определения качества управления и во многих экономических системах. Например, это важный показатель при оценивании деятельности финансово-кредитных организаций. Задавая значение этого показателя, мы можем оценить функцию издержек дефицита в условиях минимально возможных среднеожидаемых общих издержек управления. В нашем случае (табл. 6), задавая уровень вероятности дефицита 10%, можно определить восьмикратные оценки издержек дефицита по отношению к издержкам хранения.

В случае нестационарного процесса, когда, например, спрос на этапах определяется разными случайными величинами, выбор функции издержек дефицита, постоянной на всех этапах, определяется уровнем запаса, минимальным на этапах управления. Простейшая блок-схема использования имитационной модели для этого случая приведена на рис. 3.

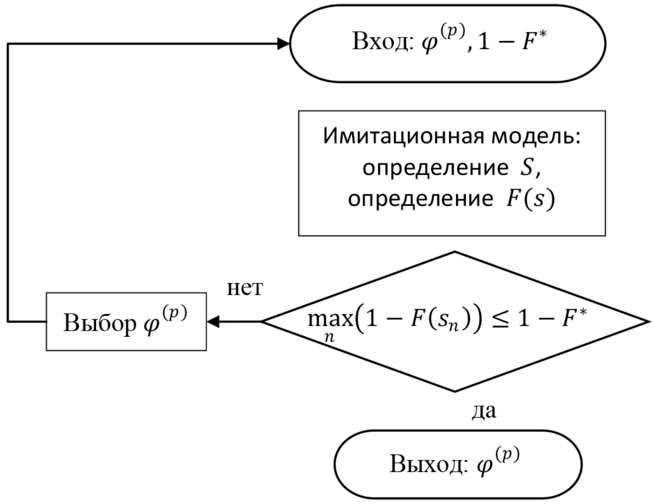

Рис. 3. Блок-схема расчета параметров функции издержек дефицита при заданной вероятности дефицита

Заключение

Применение имитационного моделирования в управлении запасом является перспективной практической методологией, расширяющей возможности оптимизационного моделирования. Модельные предпосылки, с одной стороны, существенно упрощают модель, с другой – получаемые аналитические решения не всегда пригодны для практического использования. В некоторых случаях, особенно при управлении денежным остатком финансово-кредитной организации приходится создавать дополнительные резервы, за счет которых дополнительно страховать возможный дефицит и связанные с ним дополнительные издержки.

Предлагаемая имитационная модель позволяет оценивать параметры политики одного уровня в управлении запасом в условиях применения функций издержек управления произвольной формы и определения, непостоянства параметров функций издержек, спроса и их параметров в течение всего периода управления. Модель может использоваться не только для поиска оптимального управления, но и для исследования влияния нарушения отдельных предпосылок на известные аналитические решения. Приведенный пример показывает относительную простоту имитационной модели политики управления одного уровня, которая может быть реализована не только в специализированных программно-аппаратных средах для создания имитационных моделей, но и в программных продуктах общего назначения. Приведенный условный пример реализован в среде *MS Office*.

Качество получаемых решений сильно зависит от качества исходных данных: функций издержек управления, функций распределения спроса. В частности, есть значительные проблемы с определением функций издержек дефицита. В некоторых случаях важнее использовать такие показатели качества управления, как вероятность наступления дефицита, что важно, например, для финансово-кредитных организаций. Применение имитационной модели позволяет использовать этот показатель качества управления, оценивая параметры функции издержек дефицита.

Модели управления запасом находят широкое применение не только в логистических системах материального производства, но и при управлении финансовыми ресурсами. Определение минимального уровня целевого денежного остатка фирмы – одна из основных задач финансового управления. В основе большинства моделей управления целевым денежным остатком лежат модели управления запасом.

Источники

Первозванская Т. Н. Динамическое программирование. Л., 1984.

Первозванская Т. Н., *Первозванский А. А.* Элементы теории управления запасами. Л., 1983.

Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами. СПб., 2001.

Baumol W. J. The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach // Quarterly Journal of Economics. 1952. Vol. 66. N 4. P. 545–556.

Bellman R., *Dreyfus E.* Applied Dynamic Programming. Santa Monica, CA, 1962.

Brigham E., *Ehrhardt M.* Financial Management: Theory & Practice. 13th ed. 2011.

Halpern E., *Orgler Y.* An Inventory Model for Bank Vault Cash Management // Research Papers in Banking and Financial Economics –Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.), 1975.

Miller M., *Orr D.* A Model of the Demand for Money by Firms // Quarterly Jornal of Economics. 1966. Vol. 80. P. 413–435.

Mullins D., *Homonoff R.* Application of Inventory Cash Management Models, Modern Developments in Financial Management. New York, 1976.

Stone B. The Use of Forecasts and Smoothing in Control-Limit Models for Cash Management // Financial Management. 1972. Vol. 1. N 1. P. 72–84.