

**Ю. М. Балагула**

канд. техн. наук, старший преподаватель Европейского университета в Санкт-Петербурге

## **ФРАКТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛИННОЙ ПАМЯТИ В ЦЕНАХ НА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИЮ**

### **Введение**

Определяющими тенденциями развития электроэнергетики последних десятилетий в России и в мире являются дерегулирование, приватизация, создание рынков электроэнергии. Целью этих процессов провозглашается уход от монополий в сфере энергетики, что должно способствовать снижению цен и внедрению технологических инноваций. Важными сопутствующими обстоятельствами указанных процессов стали изменение климата, вызвавшее к жизни «рынок углерода» и государственную политику в области альтернативной энергетики, развитие информационных технологий, подводящее нас к возможности технологической революции в электроэнергетике (концепция *smart grids*), а также непрекращающиеся споры вокруг ядерной энергетики.

Электроэнергия как товар обладает рядом особых свойств. Самое главное — до сих пор не существует коммерчески приемлемой технологии хранения больших количеств электрической энергии. Поэтому электроэнергетическая система как поставщик товара должна работать таким образом, чтобы в каждый момент времени обеспечивать ежесекундно меняющийся спрос соответствующим предложением. Кроме того, электричество имеет важное социальное измерение — во многих случаях ситуация прекращения поставки даже на небольшое время крайне нежелательна, иногда категорически недопустима. В то же время электроэнергетическая система является очень протяженным, но единым организмом, подверженным воздействиям природного и антропогенного характера, от которых невозможно полностью защититься. Аварийные ситуации могут распространяться по сети и приводить к масштабным системным авариям (блэкаутам). Также важны экологический аспект и соблюдение качества электроэнергии. Эти особенности должны учитываться при создании новой структуры энергетического хозяйства и анализе функционирования рынков электроэнергии.

Ключевое место в системе рынков, связанных с производством и распределением электроэнергии, занимает оптовый рынок электроэнергии, на котором производители электричества заключают контракты со сбытовыми компаниями, которые, в свою очередь, снабжают энергией население и предприятия. Так как возможность складирования практически отсутствует, электричество, поставляемое в разные моменты времени, является, по сути дела, не одним и тем же товаром.

Оптовая торговля электроэнергией может осуществляться на основе долгосрочных двусторонних договоров между генерирующей и сбытовой организациями либо в рамках биржевых торгов, в результате которых определяется спот-цена на электроэнергию на заданное время предстоящих суток (так называемый рынок на сутки

вперед). В разных странах соотношение между двумя этими способами торговли разное. Обычно основная часть электроэнергии торгуется на рынке «на сутки вперед», то есть контракты заключаются за сутки до того, как соответствующая электроэнергия будет произведена, а ее количество и цена поставки определяются для каждого часа предстоящих суток (в некоторых странах цена устанавливается на каждые полчаса и даже более мелкие промежутки времени). Процедура торгов — сложная и многоступенчатая, учитывающая технологические ограничения со стороны энергосистемы — такие как вывод оборудования в ремонт, загрузка станций с наиболее экономичным топливом, пропускная способность линий, вероятность аварий и другие факторы.

Переход от регулируемых цен на электричество к рыночным ставит перед участниками рынка новые задачи с точки зрения риск-менеджмента, финансовой устойчивости, технико-экономической оптимизации. Опыт функционирования рынков электроэнергии показал, что биржевые цены на электроэнергию, в сравнении с другими энергоресурсами, отличаются весьма высокой волатильностью, сложно структурированной сезонностью, наличием выбросов (аномально высоких значений). Кроме того, в некоторые моменты времени они могут принимать нулевые и даже отрицательные значения. Это осложняет задачи прогнозирования и моделирования временных рядов цен на электроэнергию и требует применения новых методов. Качественный прогноз цен на разных временных горизонтах необходим энергетическим предприятиям для оптимизации своей деятельности, а также многим экономическим агентам для хеджирования энергетических рисков. Кроме того, анализ структуры и понимание процессов формирования цен нужны для проведения правильной политики в области регулирования энергетики.

Проблематика анализа, моделирования и прогнозирования цен на электричество возникла естественным образом с появлением рынков электроэнергии. С начала двухтысячных годов наблюдается взрывной рост количества публикаций на эту тему (см. исчерпывающий обзор (Weron, 2014)). Магистральным направлением в этой области является применение методологии Бокса—Дженкинса (моделей типа *ARMA* — авторегрессии и скользящего среднего), основного инструмента эконометрики временных рядов. Важными дискуссионными вопросами являются вопросы о наличии длинной памяти во временных рядах цен на электричество, характере их персистентности и (дробном) порядке интегрированности. Перечисленные вопросы могут быть решены с помощью фрактального анализа.

Настоящая статья посвящена применению методов фрактального анализа для исследования таких свойств временных рядов цен на электроэнергию, как характер персистентности, наличие длинной памяти, дробный порядок интегрированности. С помощью двух наиболее распространенных методов фрактального анализа временных рядов — метода Херста и спектрального метода — анализируются часовые цены на электрическую энергию с трех оптовых рынков «на сутки вперед», а именно Италии, Скандинавии и канадской провинции Онтарио. Для них получены значения показателя Херста, спектральной размерности и дробного порядка интегрированности, а также клеточной фрактальной размерности.

### Фрактальный анализ

Фрактальный анализ как метод исследования математических множеств различной природы базируется на идеях фрактальной геометрии, разработанной Б. Мандельбротом. Начиная с 1973 г., когда была опубликована его основополагающая работа (Мандельброт, 2002), методы фрактального анализа нашли широкое применение в различных областях физики, химии, биологии, экономики.

Фрактал — геометрический объект сложной формы, характерным свойством которого является самоподобие. Количественной характеристикой (мерой) фрактала является фрактальная размерность, которая показывает, насколько плотно самоподобный объект заполняет пространство, в котором он находится. Фрактальная размерность может быть рассчитана для любой кривой на плоскости, например графика изменения цены, характеризуя свойство этой кривой, которое визуальным образом воспринимается как «гладкость», «изломанность», «извилистость» и связано со свойствами персистентности, наличия длинной памяти, дробной интегрированностью соответствующих временных рядов. Существуют различные виды фрактальных размерностей и большое разнообразие алгоритмов их вычисления. Наиболее часто используется «клеточная размерность» (*box dimension*).

Алгоритм вычисления клеточной фрактальной размерности основан на покрытии растрового изображения кривой квадратами разного размера, при этом длины ребер покрывающих квадратов обычно принимаются равными последовательным степеням двойки, т. е.  $b_i = 2^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3 \dots m$ ,  $m = \log_2 M$ , где  $M$  — размер квадратного дискретного изображения в пикселях. Пусть  $A$  — некоторое множество точек на плоскости, например растровое изображение графика изменения какой-либо экономической переменной. Возьмем квадрат размером  $b \times b$  пикселей и подсчитаем количество таких квадратов, необходимых для покрытия множества  $A$ . Пусть  $N(A, b)$  обозначает наименьшее число квадратов размером  $b \times b$ , необходимых для покрытия множества  $A$ , т. е. число квадратов данного размера, содержащих хотя бы одну точку кривой. Тогда клеточная фрактальная размерность

$$D = - \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log N(A, b)}{\log b}.$$

Клеточная фрактальная размерность кривой на плоскости изменяется в диапазоне  $D \in [1, 2]$ , характеризуя, насколько плотно исследуемая кривая заполняет лист бумаги, на котором она нарисована. При этом случай  $D = 1$  соответствует прямой линии на плоскости;  $D = 2$  мы бы получили, когда лист бумаги полностью закрашен; промежуточные значения  $D$  характеризуют степень извилистости кривой.

Этот метод может быть непосредственно применен для анализа графиков финансовых переменных, как это сделано, например, в (Romero-Melendez, 2005) для индекса мексиканского фондового рынка и в (Serletis, 2004) для временного ряда оптовой цены на электроэнергию канадской провинции Альберта, однако более корректно использовать методы определения фрактальной размерности, специально разработанные для временных рядов.

### Метод Херста

Исторически первым методом фрактального анализа временных рядов является метод Херста (Hurst, 1951), известный также как метод нормированного размаха, *Hurst R/S — statistics, rescaled range analysis*. Херст изучал историческую статистику разливов Нила и обнаружил явление персистентности — способности временного ряда поддерживать тенденцию изменения (Мандельброт, 2002). Чтобы численно характеризовать это свойство, Херст ввел показатель, позднее названный его именем, который определяется следующим образом. Рассмотрим выборку  $\{x_1, \dots, x_n\}$  из стационарного процесса с длинной памятью. Пусть  $y_t$  — частичные суммы от  $\{x_t\}$ , т. е.  $y_t = \sum_{j=1}^t x_j$  для  $t = 1 \dots n$  и  $s_n^2$  — выборочная дисперсия  $\{x_t\}$ .  $R/S$ -статистика определяется из следующего выражения:

$$R_n = \frac{1}{s_n} \left[ \max_{1 \leq t \leq n} (y_t - \frac{t}{n} y_n) - \min_{1 \leq t \leq n} (y_t - \frac{t}{n} y_n) \right].$$

Таким образом, сначала исследуемая выборка численно интегрируется. Затем подсчитывается  $R_n$  — размах получившегося ряда (разность между максимальным и минимальным значением). Чтобы можно было сравнивать показатели для временных рядов различной природы, размах нормируется среднеквадратичным отклонением исходной выборки. Процедура метода состоит в том, что из анализируемого временного ряда извлекается выборка точек, отстоящих друг от друга на  $k$  лагов  $\{x_t, \dots, x_{t+k-1}\}$ ,  $1 \leq t \leq n - k + 1$  и для данной выборки рассчитывается  $R/S$ -статистика  $R_k$ . Обычно  $k$  берется по степеням двойки. Показатель Херста  $H$  определяется методом наименьших квадратов как коэффициент регрессии  $\log R_k$  на  $\log k$ .

Показатель Херста меняется в диапазоне от 0 до 1: при  $1 > H > 0,5$  случайный процесс является персистентным, при этом следующие друг за другом приращения процесса имеют тенденцию сохранять знак; при  $0,5 > H > 0$  — антиперсистентным, т. е. постоянно меняющим знак приращений. Случай  $H = 0,5$  означает классический «белый шум». В работе (Malamud, 1999) показано, что показатель Херста временного ряда связан с фрактальной размерностью соответствующей кривой следующим соотношением:

$$D = 2 - H.$$

В работе (Weron, 2000) данный метод анализа применен к временным рядам цены (точнее, логарифмической доходности) на электроэнергию на оптовых рынках Швейцарии и Калифорнии. В работе (Afanasyev, 2015) показатель Херста  $H$  используется для анализа структуры соотношения спроса и цены на оптовом рынке электроэнергии России с помощью преобразования Гильберта—Хвана (*Hilbert–Huang transformation*), при этом авторы отмечают недостаток эмпирических данных по  $H$  для временных рядов цен и спроса на электроэнергию.

### Спектральный метод

Другой подход к фрактальному анализу временных рядов использует спектральное представление. У Кроновера (2000) показано, что спектральная плотность мощности фрактального временного ряда представляет собой степенную функцию от частоты. Тогда спектральная размерность  $\beta$  вводится как показатель степени этой функции:

$$S(f) \sim f^{-\beta}.$$

Оценку параметра  $\beta$  можно найти методом наименьших квадратов из регрессионного уравнения

$$\log I(f_i) = \alpha + \beta \log f_i + \varepsilon_i,$$

где  $I(f_i)$  — периодограмма, т. е. дискретное приближение функции спектральной плотности мощности временного ряда, получаемое с помощью стандартной процедуры дискретного быстрого преобразования Фурье;  $\log f_i$  — логарифм соответствующей частоты.

Спектральную размерность  $\beta$  можно интерпретировать как коэффициент, численно характеризующий соотношение высокочастотной (отвечающей за быстрые изменения) и низкочастотной (отвечающей за медленные изменения) составляющих временного ряда. В общем случае спектральная размерность меняется в диапазоне  $\beta \in (-\infty, +\infty)$ . Для процесса случайного блуждания, служащего базовой моделью динамики цен в финансовой теории,  $\beta = 2$ , а для процесса типа «белый шум», который представляет собой приращения случайного блуждания (т. е. получается

путем численного дифференцирования последнего),  $\beta = 0$ . В диапазоне значений спектральной размерности от  $\beta = 1$  до  $\beta = 3$  она связана с коэффициентом Херста  $H$  следующим соотношением (Malamud, 1999):

$$B = 2H + 1.$$

На спектральном подходе основан популярный полупараметрический *GPH*-тест на наличие длинной памяти (Geweke, 1983). Также используются модификации приведенных методов фрактального анализа временных рядов на основе *wavelet*-разложения, *detrended fluctuation analysis*, мультифрактального формализма. В работе (Mulligan, 2004) проведен фрактальный анализ большого количества временных рядов цен акций компаний технологического сектора с помощью метода Херста, спектрального метода и ряда других, при этом проверяется гипотеза об антиперсистентном характере поведения курса акций высокотехнологичных компаний. Критическое сравнение рассмотренных методов фрактального анализа применительно к фьючерсам на энергоносители, биржевым индексам и ценам на электроэнергию в регионах *Alberta* и *Mid Columbia* проведено в (Serinaldi, 2010).

Упомянутые выше методы фрактального анализа часто используются в контексте исследования корреляционной структуры временных рядов. Так, в работе (Urtskaya, 2008) вычисляются спектральная размерность и показатель Херста для временных рядов оптовых цен на газ и электричество в канадской провинции Альберта с целью оценить степень эффективности рынка на разных временных масштабах. В статье (Alvarez-Ramirez, 2010) изучается динамика показателя Херста, вычисленного различными методами, для характеристики корреляционной структуры оптовых цен на электроэнергию на рынках Альберта и Онтарио.

### Длинная память и дробная интегрированность

Важной характеристикой динамики временных рядов является длительность реакции на внешние шоки. Математически это свойство может быть описано с помощью автокорреляционной функции. Чем быстрее она затухает, тем меньше продолжительность присутствия во временном ряде последствий внешнего шока. В этом смысле говорят об эффекте памяти во временных рядах. Традиционным и хорошо разработанным инструментом эконометрики финансовых временных рядов является модель авторегрессии и скользящего среднего *ARMA* ( $p, q$ ). В рамках этой модели автокорреляционная функция убывает экспоненциально, то есть сравнительно быстро. Про такие временные ряды говорят, что они обладают короткой памятью. Расширением данной модели являются процессы *ARIMA* ( $p, d, q$ ) — интегрированные процессы авторегрессии и скользящего среднего, описываемые следующим уравнением

$$\Phi(L)(1 - L)^d X_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t,$$

где  $X_t$  — исследуемый процесс (временной ряд),  $L$  — оператор сдвига,  $\Phi(L)$  — полином степени  $p$  от  $L$ ,  $\Theta(L)$  — полином степени  $q$  от  $L$ ,  $d$  — порядок интегрированности процесса  $X_t$ .

При  $d = 0$   $X_t$  является процессом, удовлетворяющим модели *ARMA* ( $p, q$ ) или *ARIMA* ( $p, 0, q$ ). Этот процесс стационарен и обладает короткой памятью, то есть действие шока сохраняется в течение небольшого количества лагов. При  $d = 1$  можно говорить о бесконечной памяти ряда, имея в виду, что каждый шок оказывает влияние на поведение процесса бесконечно долго. Таким образом, промежуточная ситуация, когда последствия шока оказываются временными,

но длительными, остается вне поля зрения. Для решения этой проблемы была предложена модель дробно-интегрированного авторегрессионного процесса скользящего среднего *ARFIMA* ( $p, d, q$ ), расширяющая предыдущую на случай дробных значений  $d$ . Уравнение для этой модели остается неизменным, а оператор дробного интегрирования аппроксимируется следующим рядом:

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d) \Gamma(k+1)} L^k,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция.

При  $0 < d < 1$  автокорреляционная функция такого процесса убывает гиперболически, т. е. крайне медленно. Про такой процесс говорят, что он обладает длинной памятью. Параметр  $d$  может служить мерой длинной памяти — чем больше  $d$ , тем память длиннее. Порядок интегрированности временного ряда связан с его спектральной размерностью следующим соотношением (Palma, 2007):

$$\beta = 2d.$$

При этом белый шум ( $\beta = 0$ ) соответствует процессу *ARFIMA* ( $p, 0, q$ ), а случайное блуждание ( $\beta = 2$ ) — процессу *ARFIMA* ( $p, 1, q$ ). В общем случае  $d$  может принимать дробные и отрицательные значения.

Модели типа *ARFIMA* ( $p, d, q$ ) и их модификации часто используются для эконометрического моделирования временных рядов, в том числе цен на электроэнергию (Weron, 2014). При этом для оценивания обычно используется двухступенчатая процедура, на первом шаге которой проводится оценка параметра  $d$  с помощью описанных выше методов или их вариаций.

### Замечания по использованию методов фрактального анализа

Устойчивость метода Херста и спектрального метода к наличию выбросов, сезонности, трендов, короткой памяти и т. п. остается дискуссионным вопросом (Katsev, 2003), кроме того, не для всех случаев доказано распределение статистики, поэтому в эконометрических исследованиях часто используются различные модификации указанных методов. Так как данная статья не имеет целью полноценное эконометрическое моделирование цен на электроэнергию в исследуемых регионах, а фокусируется на вычислении фрактальных характеристик  $H, D, \beta$  и  $d$ , мы используем «наивные», базовые формулировки метода Херста и спектрального метода и не приводим интервальных оценок, так как в общем случае для них не доказано конечное распределение (Palma, 2007).

При исследовании экономических временных рядов традиционно используют какое-либо предварительное преобразование, имеющее целью привести исходный ряд к стационарности. Чаще всего вместо исходного временного ряда цен рассматривают ряды приращений или доходностей (логарифмических доходностей). В случае фрактального анализа это может привести к ошибочному выводу относительно наличия длинной памяти и характера персистентности (Serinaldi, 2010). Как было указано выше, для классического процесса случайного блуждания спектральная размерность  $\beta = 2$ , а для процесса типа «белый шум»  $\beta = 0$ . Таким образом, численное дифференцирование временного ряда соответствует уменьшению  $\beta$  на 2, а численное интегрирование — наоборот, увеличению  $\beta$  на 2. Это соотношение действует не только для целочисленных значений спектральной размерности и порядка интегрируемости ( $\beta = 0, d = 0$  — белый шум;  $\beta = 2, d = 1$  — случайное блуждание), но и для промежуточных дробных значений. Соответственно (но в разных пределах) при численном дифференцировании и интегрировании

временного ряда меняются и другие фрактальные характеристики: показатель Херста  $H$ , порядок дробной интегрированности  $d$ . Таким образом, временной ряд и его приращения имеют различные, но связанные между собой значения фрактальных характеристик и различный характер персистентности и длинной памяти. Поэтому при определении характеристик персистентности и длинной памяти необходимо четко указывать, для какого именно временного ряда делается заключение: для исходного временного ряда или производного от него ряда приращений, доходностей и т. п. С другой стороны, указанная связь между фрактальными характеристиками временного ряда и его приращений может быть использована для верификации результатов фрактального анализа, так как спектральная размерность для них отличается примерно на 2, а характер персистентности, как правило, различен.

### Данные

Для проведения фрактального анализа мы взяли временные ряды часовых оптовых цен на электроэнергию (установившаяся цена с рынка «на сутки вперед» на определенный час предстоящих суток) нескольких наиболее развитых рынков электричества для следующих географических зон: Финляндия, Норвегия — регион Осло, Швеция — регион *SE1* (рынок *NORDIC*), Северная Италия (*Mercato Elettrico*), рынок канадской провинции Онтарио (указанные регионы были выбраны по соображениям легкодоступности данных). Анализировались годовые записи цен и соответствующие временные ряды их приращений (первых разностей) за 2013, 2014 и 2015 гг. — по шесть временных рядов на регион (табл. 1). Цены для европейских стран в исходных данных выражены в евро за МВт·ч, для Онтарио — в канадских долларах за МВт·ч.

Таблица 1

Сведения о временных рядах цен на электроэнергию

Регион	Код региона	Оператор рынка	Источник данных	Вид цены
Финляндия	<i>FI</i>	<i>NordPoolSpot</i>	<a href="http://www.nordpoolspot.com">www.nordpoolspot.com</a>	<i>Elspotday-ahead</i>
Швеция — Север	<i>SE</i>	<i>NordPoolSpot</i>		
Норвегия — Осло	<i>NO</i>	<i>NordPoolSpot</i>		
Италия — Север	<i>IT</i>	<i>Gestore dei Servizi Energetici-GSE S.p.A.</i>	<a href="http://www.mercatoelettrico.org">www.mercatoelettrico.org</a>	<i>Day-Ahead Market (MGP)</i>
Онтарио	<i>ON</i>	<i>Independent Electricity System Operator (IESO)</i>	<a href="http://www.ieso.ca">www.ieso.ca</a>	<i>Hourly Ontario Energy Price (HOEP)</i>

### Результаты

Для указанных временных рядов оптовых цен на электроэнергию и временных рядов их приращений были рассчитаны показатель Херста  $H$  и спектральная размерность  $\beta$ . Порядок интегрированности определен по формуле  $d = \beta/2$ , а фрактальная размерность — как  $D = 2 - H$ . Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2

## Фрактальные характеристики длинной памяти временных рядов цен

Временной ряд	Показатель Херста $H$	Фрактальная размерность $D$	Спектральная размерность $\beta$	Порядок интегрированности $d$
<i>FI</i> 2013	0,83	1,17	1,45	0,725
<i>приращения</i>	0,35	1,65	-0,35	-0,175
<i>FI</i> 2014	0,77	1,23	1,36	0,68
<i>приращения</i>	0,27	1,73	-0,42	-0,21
<i>FI</i> 2015	0,78	1,22	1,21	0,605
<i>приращения</i>	0,25	1,75	-0,59	-0,295
<i>IT</i> 2013	0,78	1,22	1,35	0,675
<i>приращения</i>	0,22	1,78	-0,44	-0,22
<i>IT</i> 2014	0,86	1,14	1,36	0,68
<i>приращения</i>	0,24	1,76	-0,43	-0,215
<i>IT</i> 2015	0,83	1,17	1,47	0,735
<i>приращения</i>	0,27	1,73	-0,33	-0,165
<i>ON</i> 2013	0,77	1,23	0,62	0,31
<i>приращения</i>	0,35	1,65	-1,17	-0,585
<i>ON</i> 2014	0,88	1,12	0,96	0,48
<i>приращения</i>	0,37	1,63	-0,84	-0,42
<i>ON</i> 2015	0,78	1,22	0,37	0,185
<i>приращения</i>	0,4	1,6	-1,43	-0,715
<i>SE</i> 2013	0,90	1,1	1,56	0,78
<i>приращения</i>	0,33	1,67	-0,24	-0,12
<i>SE</i> 2014	0,88	1,12	1,69	0,845
<i>приращения</i>	0,36	1,64	-0,12	-0,06
<i>SE</i> 2015	0,95	1,05	1,69	0,845
<i>приращения</i>	0,34	1,66	-0,12	-0,06
<i>NO</i> 2013	0,94	1,06	1,52	0,76
<i>приращения</i>	0,38	1,62	-0,28	-0,14
<i>NO</i> 2014	0,97	1,03	1,51	0,755
<i>приращения</i>	0,38	1,62	-0,3	-0,15
<i>NO</i> 2015	0,98	1,02	1,63	0,815
<i>приращения</i>	0,38	1,62	-0,19	-0,095



Полученные значения показателя Херста свидетельствуют о персистентном характере временных рядов цен на электроэнергию и, соответственно, антиперсистентном поведении их приращений. Спектральные размерности временных рядов цен существенно отклоняются от характерного значения  $\beta = 2$ , соответствующего модели случайного блуждания, которой должны следовать цены на финансовые активы в идеальном случае эффективного рынка. Рассчитанные значения порядка интегрированности означают наличие длинной памяти в ценах на электроэнергию, что может быть объяснено наличием стохастического тренда, определяемого сезонным изменением температуры, играющей важную роль при задании режимов работы энергосистемы. Фрактальные характеристики временных рядов приращений (первых разностей) цен примерно соответствуют отмеченному выше соотношению с характеристиками исходных временных рядов.

В целом фрактальные характеристики временных рядов цен группируются вокруг одних и тех же значений. Выделяются из общего ряда Онтарио (для него спектральная размерность минимальна) и Норвегия — для нее показатель Херста принимает максимальное значение. Эти же особенности присущи соответствующим временным рядам приращений. Минимальные значения спектральной размерности  $\beta$  для Онтарио могут быть объяснены большим количеством и амплитудой «выбросов» (аномально больших значений, выявленных визуально по графику исследуемой переменной) по сравнению с другими рынками. С точки зрения теории спектральной обработки сигналов выброс, т. е. дельта-функция во временной области, создает синусоиду в частотной области, которая «зашумляет» спектр, приближая его к спектру белого шума, занижая таким образом значение спектральной размерности. По-видимому, показатель Херста менее чувствителен к наличию выбросов, чем спектральная размерность, так как использует интегрирование временного ряда. Максимальные значения показателя Херста  $H$  для Норвегии можно объяснить тем, что соответствующие временные ряды содержат наиболее выраженный стохастический тренд (низкочастотную составляющую), т. е. проявляют большую степень персистентности. Это может быть связано с преобладающей долей гидрогенерации в структуре электроэнергетики Норвегии, вследствие чего режим энергосистемы сильно зависит от естественного водного режима гидроэлектростанций. Динамика водного притока часто связана с высокой степенью персистентности, что, собственно, и послужило отправной точкой для разработки Херстом нового метода анализа временных рядов.

### Заключение

Рассмотрены методы фрактального анализа временных рядов и их применение к биржевым оптовым ценам на электроэнергию в ряде регионов. Показана связь между такими характеристиками временных рядов, как клеточная фрактальная размерность, показатель Херста, спектральная размерность, дробный порядок интегрированности; соотношение понятий длинной памяти, дробной интегрированности и персистентности временного ряда. Рассчитаны фрактальные характеристики временных рядов цен на электроэнергию, свидетельствующие об их персистентности и наличии в них длинной памяти. Полученные значения фрактальных характеристик могут быть использованы для совершенствования прогнозных моделей цен на электроэнергию, которые необходимы участникам рынка для успешного функционирования.

**Источники**

- Кроновер П. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М., 2000.
- Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М., 2002.
- Alvarez-Ramirez J., Escarela-Perez R.* Time-dependent Correlations in Electricity Markets // *Energy Economics*. 2010. Vol. 32. P. 269–277.
- Afanasyev D. O., Fedorova E. A., Popov V. U.* Fine Structure of the Price-demand Relationship in the Electricity Market: Multi-scale Correlation Analysis // *Energy Economics*. 2015. Vol. 51. P. 215–226.
- Geweke J., Porter-Hudak S.* The Estimation and Application of Long Memory Time Series models // *Journal of Time Series Analysis*. 1983. Vol. 4. P. 221–238.
- Hurst H.* The Long-term Storage Capacity of Reservoirs // *Transactions of American Society of Civil Engineers*. 1951. Vol. 116. P. 770–799.
- Katsev S., L'Heureux I.* Are Hurst Exponents Estimated From Short or Irregular Time Series Meaningful? // *Computers & Geosciences*. 2003. Vol. 29. P. 1085–1089.
- Malamud B. D., Turcotte D. L.* Self-affine Time Series: Measures of Weak and Strong Persistence // *Journal of Statistical Planning and Inference*. 1999. Vol. 80. P. 173–196.
- Mulligan R.* Fractal Analysis of Highly Volatile Markets: an Application to Technology Equities // *The Quarterly Review of Economics and Finance*. 2004. Vol. 44. P. 155–179.
- Palma W.* Long-memory Time Series. Theory and methods. Wiley, 2007.
- Romero-Melendez G. et al.* The Fractal Structure, Efficiency and Structural Change: The Case of the Mexican Stock Market // *New Tools of Economic Dynamics*, Springer, 2005. P. 347–356.
- Serinaldi F.* Use and Misuse of Some Hurst Parameter Estimators Applied to Stationary and Non-stationary Financial Time Series // *Physica A* 389. 2010. P. 2770–2781.
- Serletis A., Andreadis I.* Nonlinear Time Series Analysis of Alberta's Deregulated Electricity Market // *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*, Wiley Finance, 2004. P. 147–158.
- Uritskaya O., Serletis A.* Quantifying Multiscale Inefficiency in Electricity markets // *Energy Economics*. 2008. Vol. 30. P. 3109–3117.
- Weron R.* Electricity Price Forecasting: A Review of the State-of-the-art with a Look Into the Future // *International Journal of Forecasting*. 2014. Vol. 30. P. 1030–1081.
- Weron R., Przybyłowicz B.* Hurst Analysis of Electricity Price Dynamics, HSC Research Report HSC/00/01, Wrocław, 2000.