В. В. Коннов

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРЕНДОВЫХ СТРАТЕГИЙ

Введение

На графике любого финансового инструмента существуют трендовые участки. Тенденции роста сменяются этапами падения, давая спекулянтам гипотетическую возможность использовать вариацию ценовой динамики для увеличения своего брокерского счета. При разработке трендовых стратегий торговли необходимо выделить две основные задачи: задачу идентификации тренда и задачу оптимального управления капиталом на трендовом участке. Первая задача сводится к статистическому анализу временных рядов и построению индикатора, который достаточно быстро распознает новый тренд и не слишком поздно позволяет увидеть его окончание. Многочисленные инструменты технического анализа позволяют с некоторой степенью надежности идентифицировать тренд, но торговля по любому индикатору технического анализа сопряжена с риском потерь. Поэтому вторая задача — задача управления капиталом — заключается в выборе оптимального объема позиции, при котором достигается максимально возможная прибыль при ограниченной величине возможных потерь. Остановимся подробнее на второй задаче — о регулировании объема открытой позиции. Будем рассматривать стратегии, сочетающие в себе две классические идеи:

- вход в рынок осуществляется постепенно, по принципу «увеличения объема выигрышной позиции»;
- закрытие всех позиций происходит одновременно по сигналу «скользящего Stop Loss».

Задача состоит в том, чтобы так организовать процесс увеличения «пирамиды» открываемых позиций, чтобы при ограничении на максимально возможный убыток добиться максимума математического ожидания прибыли.

Класс рассматриваемых стратегий достаточно широк и зависит от многих параметров. Стратегии различаются, во-первых, по способу ввода капитала, который может быть или одномоментным, или постепенным. Постепенный ввод капитала может быть или дискретным, или непрерывным. Во-вторых, стратегии отличаются по способу выхода из позиции. Возможно либо частичное, либо полное сопровождение тренда. При полном сопровождении тренда программируется только скользящий Stop Loss. При частичном сопровождении тренда кроме скользящего Stop Loss программируется выход по Take Profit. Скользящий Stop Loss может меняться или дискретно, или непрерывно. Заметим, что при помощи непрерывного Stop Loss достигается выход из позиции по тактике DrawDown → Stop. В-третьих, торговля может осуществляться либо только на собственный капитал, либо кроме собственного капитала возможно использование маржинального «плеча». В любом случае покупка актива не длится бесконечно, а заканчивается на некотором шаге, зависящем от величины доступного капитала.

Далее в статье будут изучены следующие стратегии:

(S1) Одномоментный ввод фиксированной доли капитала. Фиксированный Stop Loss. Фиксированный Take Profit.

(S2) Одномоментный ввод фиксированной доли капитала. Дискретно скользящий Stop Loss. Фиксированный Take Profit.

(S3) Одномоментный ввод фиксированной доли капитала. Дискретно скользящий Stop Loss. Отсутствие Take Profit.

(S4) Одномоментный ввод фиксированной доли капитала. Непрерывно скользящий Stop Loss. Фиксированный Take Profit.

(S5) Одномоментный ввод фиксированной доли капитала. Непрерывно скользящий Stop Loss. Отсутствие Take Profit.

(S6) Постепенный дискретный ввод капитала. Дискретно скользящий Stop Loss. Фиксированный Take Profit.

(S7) Постепенный дискретный ввод капитала. Дискретно скользящий Stop Loss. Отсутствие Take Profit.

(S8) Постепенный непрерывный ввод капитала. Непрерывно скользящий Stop Loss. Фиксированный Take Profit.

(S9) Постепенный непрерывный ввод капитала. Непрерывно скользящий Stop Loss. Отсутствие Take Profit.

Для того чтобы оговорить обозначения, начнем с описания стратегии (S6).

Пусть цена актива равна C. Первоначально вводится доля x_1 исходного капитала K_0, т. е. по цене C покупаются акции на сумму x_1K_0. Если после этого цена актива падает на $B\%$, то позиция закрывается по Stop-цене $C\beta$, где $\beta = 1 - B/100$. Если же цена увеличивается на $A\%$ и становится равной $C\alpha$, где $\alpha = 1 + A/100$, то по этой цене покупается новый пакет активов на сумму x_2K_0. Теперь Stop Loss устанавливается на уровень $C\alpha\beta$. Следующая покупка акций на сумму x_3K_0 произойдет, если цена достигнет уровня $C\alpha^2$ раньше, чем произойдет выход по Stop-цене $C\alpha\beta$. Продолжая докупать акции, всякий раз, когда цена очередной раз увеличивается в α раз, будем наращивать выигрышную позицию до тех пор, пока общий объем капитала, введенного в актив, не превысит величины lK_0, где l — максимальное «плечо». Итак, капитал тратится на актив частями: $x_1, x_2, \ldots, x_N$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{N} x_k \leqslant l$, где все доли $x_1, x_2, \ldots, x_N$ неотрицательны. После того как весь доступный капитал lK_0 стал активным, происходит только изменение Stop-уровней. Выход из позиции осуществляется всем активным капиталом либо по одному из Stop Loss на уровнях $C\beta$, $C\alpha\beta$, $C\alpha^2\beta$, ..., $C\alpha^{N-1}\beta$, либо по Take Profit на уровне $C\alpha_{\mathrm{TP}} = C\alpha^N$. Цены $C\alpha$, $C\alpha^2$, $C\alpha^3$, ..., $C\alpha^{N-1}$ играют роль виртуальных Take Profit. Их достижение сигнализирует о времени очередного пополнения активного капитала и очередного «подтягивания» скользящего Stop Loss.

Таким образом, стратегия (S6) определяется следующими параметрами: β — параметр скользящего Stop Loss (самый важный параметр, играющий роль индикатора окончания тренда); α_{TP} — параметр Take Profit; α — параметр виртуального Take Profit; $N = (\ln\alpha_{\mathrm{TP}})/(\ln\alpha)$ — число этапов стратегии (на каждом этапе наращивается активный капитал и поднимается скользящий Stop Loss); x_1, x_2, ..., x_N — доли начального капитала, добавляемые на каждом этапе; l — допустимое «плечо».

Взаимосвязь стратегий (S1)—(S9) изображена на рис. 1.

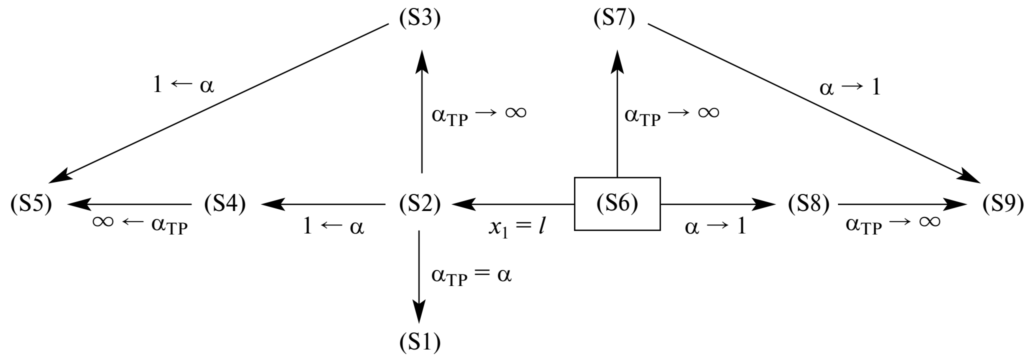

Рис. 1. Взаимосвязь стратегий

Для каждой стратегии необходимо максимизировать математическое ожидание прибыли, при условии, что максимальный убыток от стратегии не превзойдет $\gamma \cdot 100\%$.

Задача будет решена в предположении, что цена актива эволюционирует в рамках модели геометрического броуновского движения с известными параметрами сноса и волатильности.

Для сравнения стратегий будем использовать понятие «эффективность стратегии», которое определяются следующим образом. Пусть X — доходность некоторой стратегии S, а T_{exit} — время ее реализации.

Тогда $M_\gamma(S) = 100 \cdot \max\{\mathrm{E}(X) - 1 \mid 1 - X_{\min} \leqslant \gamma\}$ — математическое ожидание доходности (в процентах), при ограничении на максимальный убыток $\gamma \cdot 100\%$, а $\omega_\gamma(S) = \dfrac{M_\gamma(S)}{E(T_{\text{exit}})}$ — эффективность при ограничении на максимальный убыток $\gamma \cdot 100\%$.

Стратегии с одномоментным вводом капитала

Предположим, что цена актива удовлетворяет модели геометрического броуновского движения (Пенджер и др., 2005). Выберем единицу времени τ (рабочий time-frame), соответствующую периодичности получения сигналов с торгового терминала (например, 1 минута, 5 минут, 15 минут, 1 час и т. п.). Пусть μ — снос, а σ — волатильность актива за время τ. Считаем, что $\mu > 0$.

Введем обозначения: TP — событие, заключающееся в том, что цена, находящаяся на уровне C, достигнет уровня $C\alpha$ раньше, чем уровня $C\beta$; SL — событие, заключающееся в том, что цена, находящаяся на уровне C, достигнет уровня $C\beta$ раньше, чем уровня $C\alpha$; $\mathrm{P}(\mathrm{TP}) \equiv P_{(\alpha,\beta)}$; $\mathrm{P}(\mathrm{SL}) \equiv Q_{(\alpha,\beta)}$; $T_{(\alpha,\beta)}$ — время, за которое произойдет одно из событий SL или TP; $\theta_{(\alpha,\beta)} \equiv \mathrm{E}(T_{(\alpha,\beta)})$; $\theta^+_{(\alpha,\beta)} \equiv \mathrm{E}(T_{(\alpha,\beta)} | \mathrm{TP})$; $\theta^-_{(\alpha,\beta)} \equiv \mathrm{E}(T_{(\alpha,\beta)} | \mathrm{SL})$, $r = -\dfrac{2}{\sigma^2}\left[\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right]$. Заметим, что $\mu > 0 \Leftrightarrow r < 1$. Можно доказать (Коннов, 2001; Гисин, Коннов, Шаров, 2001), что:

$$P_{(\alpha,\beta)} = \frac{1-\beta^r}{\alpha^r - \beta^r}; \quad Q_{(\alpha,\beta)} = \frac{1-\alpha^r}{\beta^r - \alpha^r}; \quad \theta_{(\alpha,\beta)} = \frac{P_{(\alpha,\beta)} \ln\alpha + Q_{(\alpha,\beta)} \ln\beta}{\mu - \sigma^2/2};$$

$$\theta^+_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{P_{(\alpha,\beta)}}\left(\theta_{(\alpha,\beta)} \frac{\alpha^r + \beta^r}{\beta^r - \alpha^r} + Q_{(\alpha,\beta)} \frac{\ln\beta}{\mu - \sigma^2/2}\right); \quad \theta^-_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{Q_{(\alpha,\beta)}}\left(\theta_{(\alpha,\beta)} \frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha^r - \beta^r} + P_{(\alpha,\beta)} \frac{\ln\alpha}{\mu - \sigma^2/2}\right).$$

Стратегия (S1)

Пусть по цене C куплен актив на сумму lK_0, где K_0 — собственный капитал инвестора. Если цена достигнет уровня $C\alpha$, где $\alpha > 1$, то актив продается по Take Profit. Если же цена достигнет уровня $C\beta$, где $0 < \beta < 1$, то актив продается по Stop Loss. Доходность X стратегии (S1) имеет распределение:

Доходность X	$\beta l + (1 - l)$	$\alpha l + (1 - l)$
Вероятность	$Q_{(\alpha,\beta)}$	$P_{(\alpha,\beta)}$

Математическое ожидание доходности стратегии выражается формулой:

$$\mathrm{E}(X) = 1 + l\mathrm{m}, \tag{1}$$

где $\mathrm{m} \cdot 100 = (\alpha P_{(\alpha,\beta)} + \beta Q_{(\alpha,\beta)} - 1) \cdot 100$ — математическое ожидание доходности актива, выраженное в процентах (или, что то же самое, математическое ожидание доходности стратегии при $l = 1$). Для времени открытой позиции (времени реализации стратегии) можем записать:

$$\mathrm{E}(T_{\mathrm{exit}}) = Q_{(\alpha,\beta)}. \tag{2}$$

Поскольку $1 - X_{\min} = l(1 - \beta)$, то при ограничении на максимально допустимый убыток $1 - X_{\min} \leqslant \gamma$, максимум математического ожидания достигается при $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Поэтому

$$M_\gamma(S1) = \frac{\gamma}{1-\beta}\mathrm{m}; \quad \omega_\gamma(S1) = \frac{\gamma}{1-\beta} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\theta_{(\alpha,\beta)}}.$$

Стратегия (S2)

Рассмотрим параметры стратегии (S2): β — параметр скользящего Stop Loss; α_{TP} — параметр Take Profit; α — параметр виртуального Take Profit; lK_0 — объем используемого капитала, который вводится в актив на первом шаге. Напомним, что в этой стратегии дальнейшего увеличения активного капитала не происходит. Пусть $\alpha^N = \alpha_{\mathrm{TP}}$. Тогда доходность X стратегии (S2) имеет распределение:

Доходность X	$\beta l + (1 - l)$	$\beta\alpha l +$ $+ (1 - l)$	$\beta\alpha^2 l +$ $+ (1 - l)$	...	$\beta\alpha^{N-1} l +$ $+ (1 - l)$	$\alpha^N l +$ $+ (1 - l)$
Вероятность	$Q_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P^2_{(\alpha,\beta)}$	...	$Q_{(\alpha,\beta)}P^{N-1}_{(\alpha,\beta)}$	$P^N_{(\alpha,\beta)}$

Найдем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{N}\left(\beta\alpha^{n-1}l + (1-l)\right) \cdot Q_{(\alpha,\beta)}P^{n-1}_{(\alpha,\beta)} + \left(\alpha^N l + (1-l)\right) \cdot P^N_{(\alpha,\beta)}.$$

Производя суммирование и упрощая, получим:

$$\mathrm{E}(X) = 1 + l \cdot \mathrm{m}\frac{1-\alpha^N P^N_{(\alpha,\beta)}}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}. \tag{3}$$

Для вычисления $\mathrm{E}(T_{\mathrm{exit}})$ временно введем упрощенные обозначения: $P = P_{(\alpha,\beta)}$, $Q = Q_{(\alpha,\beta)}$, $\theta = \theta_{(\alpha,\beta)}$, $\theta^+_{(\alpha,\beta)} = \theta^+$, $\theta^-_{(\alpha,\beta)} = \theta^-$. Если n — номер периода, на котором произошел выход из позиции, то число n имеет распределение:

n	1	2	3	...	N	
Вероятность	Q	QP	QP^2	...	QP^{N-1}	P^N
Тип выхода	SL	SL	SL		SL	TP

Пусть T_k — длительность k-го периода. Тогда:

$$\mathrm{E}(T_{\text{exit}}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(T_{\text{exit}} \mid n\right)\right) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{P}(n=k)\,\mathrm{E}\left(T_{\text{exit}} \mid n=k\right) + \mathrm{P}(n=N)\,\mathrm{E}\left(T_{\text{exit}} \mid n=N\right) =$$

$$Q\sum_{k=1}^{N-1} P^{k-1}\,\mathrm{E}\left(T_1+T_2+\ldots+T_k \mid n=k\right) + P^{N-1}\,\mathrm{E}\left(T_1+T_2+\ldots+T_N \mid n=N\right) =$$

$$= Q\sum_{k=1}^{N-1} P^{k-1}\left((k-1)\theta^+ + \theta^-\right) + P^{N-1}\left((N-1)\theta^+ + \theta^+ P + \theta^- Q\right) =$$

$$= Q\theta^+ \sum_{k=1}^{N-1} P^{k-1} k + Q\left(\theta^- - \theta^+\right)\sum_{k=1}^{N-1} P^{k-1} + P^{N-1}\left((N-1)\theta^+ + \theta^+ P + \theta^- Q\right) =$$

$$= \frac{\theta^+ P + \theta^- Q}{Q}\left(1-P^N\right) = \frac{\theta}{Q}\left(1-P^N\right).$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}(T_{\text{exit}}) = \theta_{(\alpha,\beta)} \cdot \frac{1-P_{(\alpha,\beta)}^N}{Q_{(\alpha,\beta)}}. \tag{4}$$

При ограничении на максимально допустимый убыток $1 - X_{\min} = l(1-\beta) \leqslant \gamma$, максимум математического ожидания доходности достигается при $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Поэтому

$$\mathrm{M}_\gamma(\mathrm{S2}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\,\mathrm{m}\,\frac{1-\alpha^N P_{(\alpha,\beta)}^N}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}; \quad \omega_\gamma(\mathrm{S2}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\theta_{(\alpha,\beta)}}\cdot\frac{Q_{(\alpha,\beta)}}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}\cdot\frac{1-\alpha^N P_{(\alpha,\beta)}^N}{1-P_{(\alpha,\beta)}^N}.$$

Напомним, что в полученные формулы для стратегии (S2) параметр уровня Take Profit α_{TP} входит через равенство: $N = \dfrac{\ln \alpha_{\mathrm{TP}}}{\ln \alpha} = \log_\alpha \alpha_{\mathrm{TP}}$. В частности, все характеристики для (S1) получаются из характеристик для (S2) при $\alpha_{\mathrm{TP}} = \alpha$.

Стратегия (S3)

Стратегия (S3) имеет параметры: β — параметр скользящего Stop Loss; α — параметр виртуального Take Profit; lK_0 — объем используемого капитала, который вводится в актив на первом шаге. Доходность X стратегии (S3) имеет распределение с бесконечным числом состояний:

Доходность X	$\beta l + (1-l)$	$\beta\alpha l +$ $+ (1-l)$	$\beta\alpha^2 l +$ $+ (1-l)$	...	$\beta\alpha^{n-1} l +$ $+ (1-l)$	...
Вероятность	$Q_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P_{(\alpha,\beta)}^2$	...	$Q_{(\alpha,\beta)}P_{(\alpha,\beta)}^{N-1}$	...

Найдем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta\alpha^{n-1} l + (1-l)\right)\cdot Q_{(\alpha,\beta)} P_{(\alpha,\beta)}^{n-1} = Q_{(\alpha,\beta)}\beta l \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} P_{(\alpha,\beta)}^{n-1} + (1-l) Q_{(\alpha,\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} P_{(\alpha,\beta)}^{n-1}.$$

Если $\alpha P_{(\alpha,\beta)} \leqslant 1$, то $\mathrm{E}(X) = +\infty$. Пусть $\alpha P_{(\alpha,\beta)} < 1$, тогда, упрощая, получим:

$$\mathrm{E}(X) = 1 + l\,\mathrm{m}\frac{1}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}. \qquad (5)$$

Пусть n — номер периода, на котором произошел выход из позиции. Теперь n — случайная величина, распределенная по геометрическому закону: $P(n = k) = QP^{k-1}$, где k — натуральное число. Значит $\mathrm{E}(n) = \dfrac{1}{Q}$, и

$$\mathrm{E}(T_{\text{exit}}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(T_{\text{exit}} \mid n)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(n=k)\,\mathrm{E}\big(T_{\text{exit}} \mid n=k\big) = \sum_{k=1}^{\infty}P^{k-1}Q\cdot\mathrm{E}\big(T_1+T_2+\ldots+T_k \mid n=k\big) =$$

$$= Q\sum_{k=1}^{\infty}P^{k-1}\cdot\Big(\mathrm{E}\big(T_1 \mid \mathrm{TP}\big)+\mathrm{E}\big(T_2 \mid \mathrm{TP}\big)+\ldots+\mathrm{E}\big(T_{k-1} \mid \mathrm{TP}\big)+\mathrm{E}\big(T_k \mid \mathrm{SL}\big)\Big) =$$

$$= Q\sum_{k=1}^{\infty}P^{k-1}\big((k-1)\theta^{+}+\theta^{-}\big) = Q\theta^{+}\sum_{k=1}^{\infty}kP^{k-1} + Q(\theta^{-}-\theta^{+})\sum_{k=1}^{\infty}P^{k-1} = \frac{1}{Q}\big(\theta^{+}P+\theta^{-}Q\big) = \frac{1}{Q}\theta.$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}(T_{\text{exit}}) = \theta_{(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1}{Q_{(\alpha,\beta)}}. \qquad (6)$$

Поскольку $1 - X_{\min} = l(1 - \beta)$, то при ограничении на максимально допустимый убыток $1 - X_{\min} \leqslant \gamma$ максимум математического ожидания доходности достигается при $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Поэтому

$$\mathrm{M}_{\gamma}(\mathrm{S3}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\mathrm{m}\frac{1}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}; \quad \omega_{\gamma}(\mathrm{S3}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\theta_{(\alpha,\beta)}}\cdot\frac{Q_{(\alpha,\beta)}}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}}.$$

Заметим, что если $\alpha P_{(\alpha,\beta)} < 1$, то все характеристики для (S3) получаются из характеристик для (S2) при $N \to \infty$ (т. е. если $\alpha_{\mathrm{TP}} \to \infty$). Также отметим, что время реализации стратегии (S3) всегда конечно (в отличие от математического ожидания доходности).

Выход из позиции по сигналу DrawDown → Stop

Обозначим через $C(t)$ цену актива через t единиц времени после покупки и рассмотрим текущее значение максимума цены в момент времени t:

$$C_{\max}(t) = \max\{C(s) \mid s \in [0, t]\}.$$

Пусть $\beta\cdot C_{\max}(t)$ — динамический уровень, меньший текущего максимума на $B\%$. Напомним, что $\beta = 1 - B/100$. Сигналом к продаже актива в момент времени t_{DD} будет служить условие, что в этот момент текущая цена отклонилась вниз от максимума на $B\%$: $C(t_{\mathrm{DD}}) = \beta\cdot C_{\max}(t_{\mathrm{DD}})$. Таким образом, $B\%$ — максимально допустимый DrawDown, в момент достижения которого происходит закрытие позиции. На рис. 2 показан пример торговли с выходом по сигналу DrawDown → Stop.

Величина $\beta\cdot C_{\max}(t)$ является уровнем «скользящего» Stop Loss, призванного следить за тем, чтобы текущий DrawDown не был больше $B\%$. В отличие от ранее рассматриваемых стратегий теперь предполагается, что «подтяжка» уровня скользящего Stop Loss осуществляется непрерывно на любых положительных приращениях цены. Обозначим через $X_{\mathrm{DD}}(\beta) = \dfrac{C(t_{\mathrm{DD}})}{C(0)}$ доходность актива в мо-

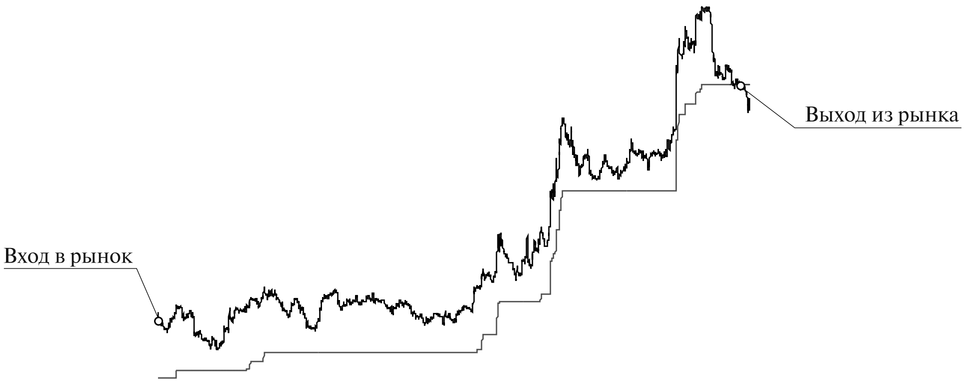

Рис. 2. Выход из позиции по сигналу DrawDown → Stop

мент t_{DD}, когда DrawDown составит $B\%$. Сразу отметим, что случайная величина $X_{DD}(\beta)$ совпадает с доходностью стратегии (S5) при $l = 1$. Нам понадобится функция распределения $F_{X_{DD}(\beta)} = P(X_{DD}(\beta) < x)$.

Рассмотрим дискретную случайную величину Z, распределенную по закону:

Значения Z	β	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$	...	$\beta\alpha^{n-1}$	...
Вероятность	$Q_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P_{(\alpha,\beta)}$	$Q_{(\alpha,\beta)}P^2_{(\alpha,\beta)}$	...	$Q_{(\alpha,\beta)}P^{N-1}_{(\alpha,\beta)}$	...

Очевидно, что величина Z — это доходность стратегии (S3) при $l = 1$. Несложно понять, что

$$\mathrm{P}\left(X_{DD}(\beta) < x\right) = \lim_{\alpha \to 1+0} \mathrm{P}\left(Z < x\right).$$

Далее можем записать:

$$\mathrm{P}(Z < \alpha^n \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} P^k_{(\alpha,\beta)} Q_{(\alpha,\beta)} = 1 - P^n_{(\alpha,\beta)}.$$

Если $\alpha^n\beta = x$, то $n = \dfrac{\ln(x/\beta)}{\ln\alpha}$ и

$$\mathrm{P}(Z < x) = 1 - P^n_{(\alpha,\beta)} = 1 - \left(P_{(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{\ln(x/\beta)}{\ln\alpha}}.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 1 + 0$, получим:

$$\lim_{\alpha\to 1+0} \mathrm{P}\left(Z < x\right) = 1 - \lim_{\alpha\to 1+0}\left(P_{(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{\ln(x/\beta)}{\ln\alpha}} = 1 - \lim_{\alpha\to 1+0}\left(\frac{1-\beta^r}{\alpha^r - \beta^r}\right)^{\frac{\ln(x/\beta)}{\ln\alpha}} = 1 - (x/\beta)^{r/(\beta^r - 1)}.$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F_{X_{DD}(\beta)}(x) \equiv \mathrm{P}\left(X_{DD}(\beta) < x\right) = 1 - \left(x/\beta\right)^{r/\left(\beta^r - 1\right)}, \text{ где } x \geqslant \beta.$$

Напомним, что для растущего рынка $r < 1$, а параметр β удовлетворяет условию $0 < \beta < 1$. Для плотности распределения можем записать:

$$f_{X_{DD}(\beta)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X_{DD}(\beta)}(x) = \frac{r}{\beta(1-\beta^r)}\left(x/\beta\right)^{\left(\beta^r - r - 1\right)/\left(1-\beta^r\right)}.$$

Графики функций $F_{X_{DD}(\beta)}(x)$ и $f_{X_{DD}(\beta)}(x)$ приведены на рис. 3.

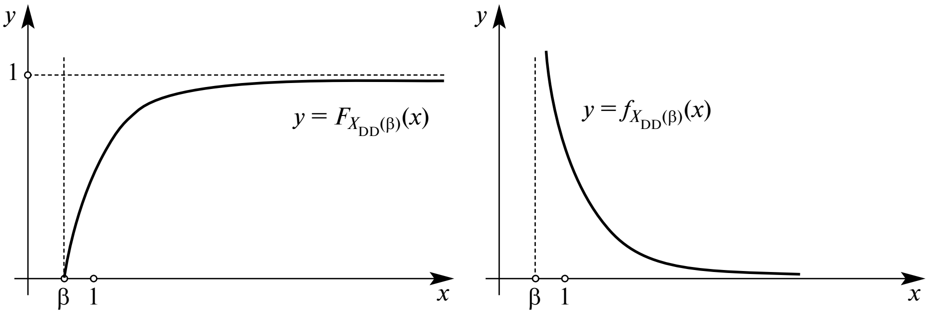

Рис. 3. Доходность актива в момент остановки по DrawDown → Stop

Теперь находим математическое ожидание доходности актива в тот момент, когда DrawDown составит $B\%$:

$$\mathrm{E}\big(X_{\text{DD}}(\beta)\big) = \int_{\beta}^{\infty} x \cdot f_{X_{\text{DD}}(\beta)}(x)dx = \begin{cases} \dfrac{r\beta}{\beta^r + r - 1}, & \text{если } \beta > (1-r)^{1/r}, \\ +\infty, & \text{если } \beta \le (1-r)^{1/r}. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание. Формулу (7) можно получить иначе. При $l = 1$ из формулы (5) получается математическое ожидание величины Z:

$$\mathrm{E}(Z) = 1 + \mathrm{m}\frac{1}{1-\alpha P_{(\alpha,\beta)}} = \frac{(1-\alpha^r)\beta}{\beta^r - \alpha^r + \alpha(1-\beta^r)}.$$

Переходя к пределу, найдем:

$$\lim_{\alpha\to 1+0}\mathrm{E}(Z) = \lim_{\alpha\to 1+0}\frac{(1-\alpha^r)\beta}{\beta^r - \alpha^r + \alpha(1-\beta^r)} = \frac{\beta r}{\beta^r + r - 1} = \mathrm{E}\big(X_{\text{DD}}(\beta)\big).$$

Аналогичным предельным переходом можно найти математическое ожидание времени t_{DD}, когда DrawDown составит $B\%$. Для этого в формуле (6) необходимо осуществить предельный переход при $\alpha \to 1 + 0$:

$$\lim_{\alpha\to 1+0}\left(\theta_{(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1}{Q_{(\alpha,\beta)}}\right) = \lim_{\alpha\to 1+0}\frac{\dfrac{1-\beta^r}{\alpha^r-\beta^r}\ln\alpha + \dfrac{1-\alpha^r}{\beta^r-\alpha^r}\ln\beta}{\left(\mu-\sigma^2/2\right)\dfrac{1-\alpha^r}{\beta^r-\alpha^r}} = \frac{\ln\beta^r + 1 - \beta^r}{\left(\mu-\sigma^2/2\right)r};$$

$$\mathrm{E}(t_{\text{DD}}) = \frac{\ln\beta^r + 1 - \beta^r}{\left(\mu-\sigma^2/2\right)r}. \tag{8}$$

Стратегия (S5)

Стратегия (S5) имеет всего два параметра: β — максимально допустимый параметр для DrawDown и l — параметр объема активного капитала. Как и в описанных ранее стратегиях, капитал lK_0 вводится в актив на первом шаге, и дальнейшего увеличения активного капитала не происходит.

Пусть X — доходность стратегии (S5). Тогда $X = l\cdot X_{\text{DD}}(\beta) + 1 - l$. Поэтому

$$\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}\big(l\cdot X_{\text{DD}}(\beta) + 1 - l < x\big) = \mathrm{P}\left(X_{\text{DD}}(\beta) < \frac{x+l-1}{l}\right).$$

Следовательно, доходность стратегии (S5) имеет функцию распределения:

$$F_X(x) = F_{X_{\mathrm{DD}}(\beta)}\left(\frac{x+l-1}{l}\right) = 1 - \left(\frac{x+l-1}{l\,\beta}\right)^{r/(\beta^r - 1)} \tag{9}$$

и плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{l}\cdot f_{X_{\mathrm{DD}}(\beta)}\left(\frac{x+l-1}{l}\right) = \frac{r}{l\beta(1-\beta^r)}\left(\frac{x+l-1}{l\beta}\right)^{(\beta^r - r - 1)/(1-\beta^r)}, \tag{10}$$

где $x \geqslant 1 - l(1 - \beta)$.

Математическое ожидание доходности определяется формулой:

$$\mathrm{E}(X) = l\cdot \mathrm{E}\left(X_{\mathrm{DD}}(\beta)\right) + 1 - l = \begin{cases} l\left(\dfrac{r\beta}{\beta^r + r - 1} - 1\right) + 1, & \text{если } \beta > (1-r)^{1/r}, \\ +\infty, & \text{если } \beta \le (1-r)^{1/r}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что формула (11) может быть выведена из (5) предельным переходом при $\alpha \to 1 + 0$.

Далее можем записать:

$$\mathrm{E}\left(T_{\mathrm{exit}}\right) = \mathrm{E}(t_{\mathrm{DD}}) = \frac{\ln\beta^r + 1 - \beta^r}{\left(\mu - \sigma^2/2\right)r}. \tag{12}$$

Поскольку $1 - X_{\min} = l(1 - \beta)$, то условие $1 - X_{\min} \leqslant \gamma$ приводит к ограничению: $l \leqslant \dfrac{\gamma}{1-\beta}$.

Максимальное значение для ожидания $\mathrm{E}(X) = l(\mathrm{E}(X_{\mathrm{DD}}(\beta)) - 1) + 1$ достигается при $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Значит,

$$\mathrm{M}_\gamma(\mathrm{S5}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\left(\frac{r\beta}{\beta^r + r - 1} - 1\right); \quad \omega_\gamma(\mathrm{S5}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\frac{r\beta}{\beta^r + r - 1} - 1\right)\cdot\frac{\left(\mu - \sigma^2/2\right)r}{\ln\beta^r + 1 - \beta^r}.$$

Выход из позиции по одному из двух сигналов: DrawDown → Stop или Take Profit

Обозначим через $X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta, \alpha_{\mathrm{TP}}) = \dfrac{C(t_{\mathrm{exit}})}{C(0)}$ доходность актива в момент $t_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}$, когда либо DrawDown составит $B\%$, либо цена актива станет равной $C(0)\cdot\alpha_{\mathrm{TP}}$. Отметим, что случайная величина $X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta, \alpha_{\mathrm{TP}})$ совпадает с доходностью стратегии (S4) при $l = 1$. Найдем функцию распределения $F_{X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta,\ \alpha_{\mathrm{TP}})}(x) = \mathrm{P}(F_{X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}}(\beta, \alpha_{\mathrm{TP}}) < x)$, учитывая, что

$$X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta, \alpha_{\mathrm{TP}}) = \begin{cases} X_{\mathrm{DD}}(\beta), & \text{если } X_{\mathrm{DD}}(\beta) < \beta\alpha_{\mathrm{TP}}, \\ \alpha_{\mathrm{TP}}, & \text{если } X_{\mathrm{DD}}(\beta) \ge \beta\alpha_{\mathrm{TP}}. \end{cases}$$

По формуле полной вероятности можем записать:

$$\mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta,\alpha_{\mathrm{TP}}) < x\right) = \mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}}(\beta) < \beta\alpha_{\mathrm{TP}}\right)\mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta,\alpha_{\mathrm{TP}}) < x \mid X_{\mathrm{DD}}(\beta) < \beta\alpha_{\mathrm{TP}}\right) +$$
$$+ \mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}}(\beta) \ge \beta\alpha_{\mathrm{TP}}\right)\mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta,\alpha_{\mathrm{TP}}) < x \mid X_{\mathrm{DD}}(\beta) \ge \beta\alpha_{\mathrm{TP}}\right).$$

Последовательно находим:

$$P\left(X_{DD}(\beta)<\beta\alpha_{TP}\right)=F_{X_{DD}(\beta)}\left(\beta\alpha_{TP}\right)=1-\left(\alpha_{TP}\right)^{r/\left(\beta^r-1\right)};$$

$$P\left(X_{DD}(\beta)\geq\beta\alpha_{TP}\right)=\left(\alpha_{TP}\right)^{r/\left(\beta^r-1\right)};$$

$$P\left(X_{DD\vee TP}(\beta,\alpha_{TP})<x\mid X_{DD}(\beta)<\beta\alpha_{TP}\right)=P\left(X_{DD}(\beta)<x\mid X_{DD}(\beta)<\beta\alpha_{TP}\right)=$$

$$=\frac{P\left(X_{DD}(\beta)<x,\,X_{DD}(\beta)<\beta\alpha_{TP}\right)}{P\left(X_{DD}(\beta)<\beta\alpha_{TP}\right)}=\frac{P\left(X_{DD}(\beta)<\min\left\{x,\beta\alpha_{TP}\right\}\right)}{F_{X_{DD}(\beta)}\left(\beta\alpha_{TP}\right)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{F_{X_{DD}(\beta)}\left(x\right)}{F_{X_{DD}(\beta)}\left(\beta\alpha_{TP}\right)}, & \text{если } x\leq\beta\alpha_{TP},\\ 1, & \text{если } x>\beta\alpha_{TP}.\end{cases}$$

$$P\left(\alpha_{TP}<x\mid X_{DD}(\beta)\geq\beta\alpha_{TP}\right)=P\left(\alpha_{TP}<x\right)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leq\alpha_{TP},\\ 1, & \text{если } x>\alpha_{TP};\end{cases}$$

$$P\left(X_{DD\vee TP}(\beta,\alpha_{TP})<x\right)=\begin{cases}F_{X_{DD}(\beta)}\left(x\right), & \text{если } x\leq\beta\alpha_{TP},\\ F_{X_{DD}(\beta)}\left(\beta\alpha_{TP}\right), & \text{если } \beta\alpha_{TP}<x\leq\alpha_{TP},\\ 1, & \text{если } x>\alpha_{TP}.\end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$F_{X_{DD\vee TP}(\beta,\alpha_{TP})}(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leq\beta,\\ 1-\left(x/\beta\right)^{r/\left(\beta^r-1\right)}, & \text{если } \beta<x\leq\beta\alpha_{TP},\\ 1-\left(\alpha_{TP}\right)^{r/\left(\beta^r-1\right)}, & \text{если } \beta\alpha_{TP}<x\leq\alpha_{TP},\\ 1, & \text{если } x>\alpha_{TP}.\end{cases}$$

График функции распределения $F_{X_{DD\vee TP}(\beta,\,\alpha_{TP})}(x)$ представлен на рис. 4.

Теперь можно найти математическое ожидание доходности актива в момент $t_{DD\vee TP}$:

$$E\left(X_{DD\vee TP}(\beta,\alpha_{TP})\right)=\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}+\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\left(1-\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}\right). \quad (13)$$

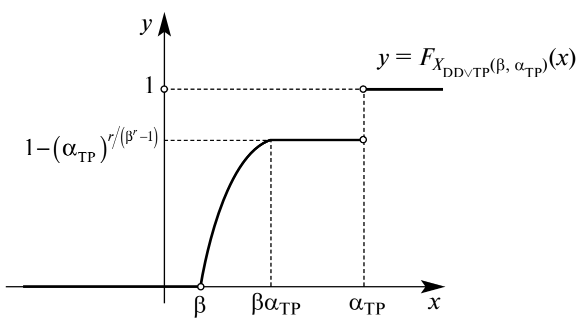

Рис. 4. Функция распределения доходности актива в момент остановки по одному из двух сигналов: DrawDown → Stop или Take Profit

Замечания.

1. Формулу (13) можно получить без явного вида функции распределения $F_{X_{DD\vee TP}(\beta,\, \alpha_{TP})}(x)$. Если в формуле (3) положить $l = 1$, $N = \dfrac{\ln \alpha_{TP}}{\ln \alpha}$ и перейти к пределу при $\alpha \to 1 + 0$, то получится равенство (13). Точно так же, осуществляя предельный переход в формуле (4), получается математическое ожидание времени $t_{DD\vee TP}$:

$$\mathrm{E}(t_{DD\vee TP}) = \lim_{\alpha\to 1+0}\left(\theta_{(\alpha,\beta)}\cdot\frac{1-\left(P_{(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{\ln\alpha_{TP}}{\ln\alpha}}}{Q_{(\alpha,\beta)}}\right) = \frac{\ln\beta^r+1-\beta^r}{\left(\mu-\sigma^2/2\right)r}\left(1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{r}{\beta^r-1}}\right). \tag{14}$$

2. Математическое ожидание $\mathrm{E}(X_{DD\vee TP}(\beta, \alpha_{TP}))$ всегда конечно. Функция из правой части формулы (14) имеет устранимый разрыв. Дополняя значение функции в точке $\beta = (1 - r)^{1/r}$ значением по непрерывности, получим:

$$\mathrm{E}\left(X_{DD\vee TP}((1-r)^{1/r},\alpha_{TP})\right) = \lim_{\beta\to(1-r)^{1/r}}\mathrm{E}\left(X_{DD\vee TP}(\beta,\alpha_{TP})\right) = (1-r)^{1/r}\ln\alpha_{TP}+1.$$

Теперь формула (13) приобретает смысл и при $\beta^r + r - 1 = 0$.

Стратегия (S4)

В рамках этой стратегии вход в позицию капиталом lK_0 осуществляется одномоментно, после чего актив не докупается. Выход из позиции производится по одному из двух сигналов (по тому, который поступит раньше): DrawDown → Stop или Take Profit.

Пусть X — доходность стратегии (S4). Тогда $X = l\cdot X_{DD\vee TP}(\beta, \alpha_{TP}) + 1 - l$. Характеристики стратегии имеют вид:

$$\mathrm{E}(X) = l\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}-1\right)\left(1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\right)+1; \tag{15}$$

$$\mathrm{E}(T_{exit}) = \frac{\ln\beta^r+1-\beta^r}{\left(\mu-\sigma^2/2\right)r}\left(1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{r}{\beta^r-1}}\right). \tag{16}$$

Условие $1 - X_{min} \leqslant \gamma$ приводит к ограничению: $l \leqslant \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Максимальное значение для ожидания $\mathrm{E}(X)$ достигается при $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$. Значит,

$$\mathrm{M}_\gamma(\mathrm{S4}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}-1\right)\left(1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\right);$$

$$\omega_\gamma(\mathrm{S4}) = \frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}-1\right)\cdot\frac{\left(\mu-\sigma^2/2\right)r}{\ln\beta^r+1-\beta^r}\cdot\frac{1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}}{1-\left(\alpha_{TP}\right)^{\frac{r}{\beta^r-1}}}.$$

Записанные формулы показывают, что при $\alpha_{TP} \to \infty$ все характеристики стратегии (S4) переходят в характеристики стратегии (S5).

Замечание. Если $\beta^r + r - 1 = 0$, то полученные формулы продолжаются по непрерывности. Например, формулу (15) следует использовать так:

$$\mathrm{E}(X)=\lim_{\beta\to(1-r)^{1/r}}\left(l\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}-1\right)\left(1-\left(\alpha_{\text{ТР}}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\right)+1\right)=l\cdot(1-r)^{1/r}\ln\alpha_{\text{ТР}}+1.$$

Примеры стратегий с одномоментным вводом капитала

Возможный выбор β

На каждом этапе сопровождения тренда уровень Stop Loss должен быть согласован с сигналом системы об окончании тенденции. Поэтому удачный выбор параметра β наиболее важен для рассматриваемого класса стратегий. Критерием стабильности тренда будем считать тот факт, что с доверительной вероятностью ζ за время t логарифм относительного изменения цены актива не отклонится вниз от среднего значения более чем на k стандартных отклонений:

$$\mathrm{P}\left(\ln\frac{C(t_0+t)}{C(t_0)}>\left(\mu-\sigma^2/2\right)t-k\sqrt{t}\sigma\right)=\zeta.$$

Поскольку в рамках выбранной модели

$$\ln\frac{C(t_0+t)}{C(t_0)}=\left(\mu-\sigma^2/2\right)t+\sqrt{t}\sigma Z,$$

где Z — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, то $\zeta = \mathrm{P}(Z > -k) = F(k)$, и $k = F^{-1}(\zeta)$, где $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Таким образом, если тренд «стабилен», то уход цены ниже уровня

$$\left(\mu-\sigma^2/2\right)t-k\sqrt{t}\sigma$$

в момент времени t является событием, наступающем с вероятностью $1 - \zeta$.

Доверительная граница $y=\left(\mu-\sigma^2/2\right)t-k\sqrt{t}\sigma$ имеет глобальный минимум на уровне $y_{\min}=-\dfrac{k^2}{4}\dfrac{\sigma^2}{\mu-\sigma^2/2}$, который достигается в точке $t_{\text{кр}}=\dfrac{k^2}{4}\left(\dfrac{\sigma}{\mu-\sigma^2/2}\right)^2$. Возможным способом выбора параметра β является расположение его логарифма на уровне минимума доверительной границы: $\ln\beta=-\dfrac{k^2}{4}\dfrac{\sigma^2}{\mu-\sigma^2/2}$.

На рис. 5 представлен пятиминутный график (τ = 5 мин) акций «Роснефть» за три полных торговых дня (с 03.01.2012 по 05.01.2012).

Рис. 5. График акций «Роснефть» с 3 января 2012 г. по 5 января 2012 г.

Для временного ряда логарифмов доходностей: $\sigma = 0{,}001418$ и $\mu - \sigma^2/2 = 0{,}00015$. Возьмем $k = 2$, что соответствует доверительной вероятности $\zeta = 0{,}977$. Тогда $t_{кр} = \frac{k^2}{4}\left(\frac{\sigma}{\mu - \sigma^2/2}\right)^2 \approx 89{,}37$ (пятиминутных интервала) $\approx 11{,}17$ (часа). Определим параметр β условием $\ln\beta = -\frac{k^2}{4}\frac{\sigma^2}{\mu - \sigma^2/2} \approx -0{,}0134$. Тогда $\beta = 0{,}9867$.

Возможный выбор α

Для выбора параметра α зададим предпочтительное среднее время $\mathrm{E}(T_{(\alpha,\beta)}) \equiv \theta_{(\alpha,\beta)}$ между входом в рынок и достижением одного из Stop-уровней. Тогда если параметр β выбран, то параметр α ищем из уравнения:

$$\mathrm{E}\left(T_{(\alpha,\beta)}\right) = \frac{\dfrac{1-\beta^r}{\alpha^r - \beta^r}\ln\alpha + \dfrac{1-\alpha^r}{\beta^r - \alpha^r}\ln\beta}{\mu - \sigma^2/2}.$$

Пусть, например, $\mathrm{E}(T_{(\alpha,\beta)}) = 4$ (часа) $= 48$ (пятиминутных интервалов). Для выбранных данных приближенное решение уравнения

$$48 = \frac{\dfrac{1-0{,}9867^{-149{,}2}}{\alpha^{-149{,}2} - 0{,}9867^{-149{,}2}}\ln\alpha + \dfrac{1-\alpha^{-149{,}2}}{0{,}9867^{-149{,}2} - \alpha^{-149{,}2}}\ln 0{,}9867}{0{,}00015}$$

имеет вид: $\alpha = 1{,}009714$. Значит $P_{(\alpha,\beta)} = 0{,}8929825$ и $Q_{(\alpha,\beta)} = 0{,}1070175$.

Характеристики стратегий с ограничением на риск

Для выбранного параметра $\beta = 0{,}9867$ рассмотрим характеристики стратегий (S1)—(S5) с ограничением на максимально возможный убыток 1% ($\gamma = 0{,}01$). Для стратегий (S1), (S2), (S3) положим $\alpha = 1{,}009714$. Для стратегий (S2) и (S4) параметр для уровня Take Profit выберем на уровне $\alpha_{TP} = \alpha^5 = 1{,}049523$ ($\approx 4{,}95\%$).

Характеристики	**(S1)**	**(S2)**	**(S3)**	**(S4)**	**(S5)**
M_γ (%)	0,5452	2,2400	5,5438	1,5280	2,3097
$\mathrm{E}(T_{exit})$ (часов)	4	16,1534	37,3771	11,0357	16,2877
ω_γ (% в час)	0,1363	0,1387	0,1483	0,1385	0,1418

Сравнивая стратегии по эффективности, приходим к выводу (который легко увидеть из доказанных формул и в общем виде), что:

$$(S1) \prec (S2) \prec (S3)$$

— для стратегий с дискретно скользящим Stop Loss, и

$$(S4) \prec (S5)$$

— для стратегий с непрерывно скользящим Stop Loss.

Отметим, что ограничение на максимально возможный убыток $\gamma \cdot 100\% = 1\%$ вынуждает использовать только $\frac{\gamma}{1-\beta} \cdot 100\% = 75{,}1880\%$ исходного капитала.

Дискретный ввод капитала. Оптимальные стратегии

Перейдем к изучению стратегий с постепенным вводом капитала. Начнем с оптимизации стратегии (S6), подробно описанной во введении.

Задача оптимизации

Напомним обозначения для параметров стратегии (S6): β — параметр дискретно скользящего Stop Loss; α — параметр виртуального Take Profit; $\alpha_{\text{TP}} = \alpha^N$ — параметр Take Profit; N — число этапов перестройки уровня Stop Loss; $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — доли доступного капитала, добавляемые на каждом этапе; l — допустимое «плечо»; γ — параметр допустимого убытка; $P = P_{(\alpha,\beta)}$, $Q = Q_{(\alpha,\beta)}$, $\mathrm{m} = \alpha P + \beta Q - 1$.

Распределение возможной доходности X для стратегии имеет вид:

$$\mathrm{P}\left(X = \beta\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}x_k + 1 - \sum_{k=1}^{n}x_k \right) = P^{n-1}Q, \text{ при } n = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\mathrm{P}\left(X = \sum_{k=1}^{N}\alpha^{N-k+1}x_k + 1 - \sum_{k=1}^{N}x_k \right) = P^N.$$

Математическое ожидание доходности выражается формулой:

$$\mathbf{L}_N \equiv \mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{N}\left(\left(\beta\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}x_k + 1 - \sum_{k=1}^{n}x_k\right)P^{n-1}Q\right) + \left(\sum_{k=1}^{N}\alpha^{N-k+1}x_k + 1 - \sum_{k=1}^{N}x_k\right)P^N.$$

После необходимых преобразований последнюю формулу можно упростить:

$$\mathbf{L}_N = 1 + \frac{\mathrm{m}}{1 - P\alpha}\sum_{n=1}^{N}\left(1 - (P\alpha)^{N-n+1}\right)P^{n-1}x_n. \tag{17}$$

Требуется за счет выбора параметров $x_1, x_2, \ldots, x_N$ максимизировать $\mathbf{L}_N$ при условии, что при любом возможном выходе из позиции убыток не составит величину, большую $\gamma \cdot 100\%$. Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \beta\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}x_k + 1 - \sum\limits_{k=1}^{n}x_k \ge 1 - \gamma, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots, N, \\ x_n \ge 0, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots, N; \quad \sum\limits_{k=1}^{N}x_k \le l; \end{cases} \qquad \mathbf{L}_N \to \max. \tag{18}$$

Общее решение задачи (18) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\gamma}{1-\beta}; \quad x_n = \dfrac{\gamma}{1-\beta}\cdot\dfrac{\alpha-1}{1-\beta}\cdot\beta\cdot\left(\dfrac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{n-2}, \text{ где } n = 2, 3, \ldots, \mathrm{S}, \\ x_{\mathrm{S}+1} = l - \gamma\left(1 + \dfrac{\beta}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{\mathrm{S}-1}\right); \quad x_{\mathrm{S}+2} = x_{\mathrm{S}+3} = \ldots = x_N = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь S — целая часть числа $1 + \dfrac{\ln\left((l-\gamma)(1-\beta)/(\gamma\beta)\right)}{\ln\left((\alpha-\beta)/(1-\beta)\right)}$. Если это число целое, то на шаге с номером S весь доступный капитал становится активным. Если же указанное число не целое, то весь доступный капитал становится активным на шаге с номером S + 1.

Математическое ожидание доходности для оптимальной стратегии

Найдем математическое ожидание доходности стратегии (S6) для оптимальных долей капитала (19) задачи (18). Необходимо рассмотреть два случая.

1-й случай: $1 \leqslant N \leqslant \mathrm{S}$. Распределение возможных доходностей имеет вид:

n	1	2	3	...	$N-1$	N	
Доходность	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$	...	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$\alpha \mathrm{W}_N + 1 - \sum_{n=1}^{N} x_n$
Вероятность	Q	QP	QP^2	...	QP^{N-2}	QP^{N-1}	P^N

Здесь W_N — приращенная доля активного капитала, наблюдаемая на шаге с номером N, если до этого не произошел выход из позиции.

$$\mathrm{W}_N = x_1\alpha^{N-1} + x_2\alpha^{N-2} + \ldots + x_{N-1}\alpha + x_N = \alpha^{N-1}\sum_{k=1}^{N} x_k\alpha^{1-k}.$$

Произведем вычисления для оптимальных долей (19), последовательно находим:

$$\mathrm{W}_N = \alpha^{N-1}\left(x_1 + \sum_{k=2}^{N} x_k\alpha^{1-k}\right) = \alpha^{N-1}\left(\frac{\gamma}{1-\beta} + \sum_{k=2}^{N}\frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\frac{\alpha-1}{1-\beta}\cdot\beta\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{k-2}\alpha^{1-k}\right) = \frac{\gamma}{1-\beta}\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N-1};$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = x_1 + \sum_{n=2}^{N} x_n = \frac{\gamma}{1-\beta} + \sum_{n=2}^{N}\frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\frac{\alpha-1}{1-\beta}\cdot\beta\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{n-2} = \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N-1}\right);$$

$$\alpha \mathrm{W}_N + 1 - \sum_{n=1}^{N} x_n = \alpha\frac{\gamma}{1-\beta}\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N-1} + 1 - \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N-1}\right) = (1-\gamma) + \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N};$$

$$\mathrm{L}_N = (1-\gamma)\left(Q + QP + \ldots + QP^{N-1}\right) + \left((1-\gamma) + \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N}\right)P^N =$$

$$= (1-\gamma)\left(1-P^N\right) + \left((1-\gamma) + \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N}\right)P^N = (1-\gamma) + \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N} P^N.$$

Таким образом,

$$\mathrm{L}_N = (1-\gamma) + \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{N} P^N. \qquad (20)$$

2-й случай: $N = \mathrm{S} + \mathrm{K}$, где $\mathrm{K} > 0$. Распределение возможных доходностей имеет вид:

1	2	...	S	S + 1	S + 2	...	S + K	
$1-\gamma$	$1-\gamma$	...	$1-\gamma$	$\beta\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1} +$ $+1-l$	$\alpha\beta\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1} +$ $+1-l$	...	$\alpha^{\mathrm{K}-1}\beta\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1} + 1 - l$	$\alpha^{\mathrm{K}}\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1} + 1 - l$
Q	QP	...	$QP^{\mathrm{S}-1}$	QP^{S}	$QP^{\mathrm{S}+1}$	...	$QP^{\mathrm{S}+\mathrm{K}-1}$	$P^{\mathrm{S}+\mathrm{K}}$

Найдем приращенную долю активного капитала $\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1}$, наблюдаемую на шаге с номером S + 1, если до этого не произошел выход из позиции.

$$\mathrm{W}_{\mathrm{S}+1} = x_1\alpha^{\mathrm{S}} + x_2\alpha^{\mathrm{S}-1} + \ldots + x_{\mathrm{S}}\alpha + x_{\mathrm{S}+1} = \alpha^{\mathrm{S}}\left(x_1 + \sum_{k=2}^{\mathrm{S}} x_k\alpha^{1-k}\right) + x_{\mathrm{S}+1}.$$

Подставим в это равенство оптимальные доли (19):

$$W_{S+1}\alpha^{S}\left(\frac{\gamma}{1-\beta}+\sum_{k=2}^{S}\frac{\gamma}{1-\beta}\cdot\frac{\alpha-1}{1-\beta}\cdot\beta\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{S-2}\alpha^{-k}\right)+l-\gamma\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{S-1}\right).$$

Вычислив полученную сумму, найдем:

$$W_{S+1}=(l-\gamma)+\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{S}.$$

Теперь найдем математическое ожидание доходности стратегии с оптимальными долями:

$$\mathbf{L}_{S+K}=\sum_{n=1}^{S}(1-\gamma)QP^{n-1}+\sum_{k=1}^{K}(\beta\alpha^{k-1}W_{S+1}+1-l)QP^{S+k-1}+(\alpha^{K}W_{S+1}+1-l)P^{S+K}=$$

$$=(1-\gamma)\left(1-P^{S}\right)+P^{S}\left((1-l)+W_{S+1}\left(\left(1-(\alpha P)^{K}\right)\left(1+\frac{m}{1-\alpha P}\right)+(\alpha P)^{K}\right)\right);$$

$$\mathbf{L}_{N}=\left(1-P^{S}\right)(1-\gamma)+$$

$$+P^{S}\left((1-l)+\left((l-\gamma)+\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^{S}\right)\left(\left(1-(\alpha P)^{K}\right)\left(1+\frac{m}{1-\alpha P}\right)+(\alpha P)^{K}\right)\right). \qquad (21)$$

Итак, можно сформулировать следующий результат. Для стратегии (S6) оптимальные доли капитала имеют вид (19), а математическое ожидание для оптимальных долей выражается либо формулой (20) при $1 \leqslant N \leqslant S$, либо формулой (21) при $N = S + K$, где $K > 0$. Время открытой позиции стратегии (S6) вычисляется по формуле (4).

Заметим, что если $l = \dfrac{\gamma}{1-\beta}$, то $S = 1$ и $K = N - 1$. В этом случае несложные преобразования покажут, что формулы (21) и (3) будут давать один и тот же результат для оптимальной стратегии (S2).

Наращивание позиции при полном сопровождении тренда

Стратегия (S6), описанная в предыдущем параграфе, имеет недостаток. Уровень Take Profit с параметром $\alpha_{TP} = \alpha^{N}$ не позволяет следовать за длинными трендами. Преждевременное закрытие позиций на растущем рынке связано с риском недополучить прибыль. Модифицируем стратегию (S6), заменив Take Profit с параметром α^{N} виртуальным Take Profit, и продолжим следовать за рынком, придерживаясь тактики «скользящего Stop». Тем самым мы переходим к стратегии (S7).

Если добавлять капитал оптимальными долями (19), то начиная с шага S + 1 свободного капитала не останется, и управление стратегией сведется только к подтягиванию скользящих Stop-уровней. Распределение возможных доходностей имеет вид:

1	2	…	n	…	S	S + 1	S + 2	…	S + k	…
$1-\gamma$	$1-\gamma$	…	$1-\gamma$	…	$1-\gamma$	$\beta W_{S+1}+$ $+1-l$	$\alpha\beta W_{S+1}+$ $+1-l$	…	$\alpha^{k-1}\beta W_{S+1}+$ $1-l$	…
Q	QP	…	QP^{n-1}	…	QP^{S-1}	QP^{S}	QP^{S+2}	…	QP^{S+k-1}	…

Приращенная доля активного капитала W_{S+1}, наблюдаемая на шаге с номером S + 1, найдена ранее: $W_{S+1}=(l-\gamma)+\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^S$. Вычислим математическое ожидание доходности стратегии (S7) для оптимальных долей:

$$\mathbf{L}=\sum_{n=1}^{S}(1-\gamma)QP^{n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(\beta\alpha^{k-1}W_{S+1}+1-l)QP^{S+k-1}=$$
$$=(1-\gamma)Q\sum_{n=1}^{S}P^{n-1}+\beta W_{S+1}P^SQ\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{k-1}P^{k-1}+QP^S(1-l)\sum_{k=1}^{\infty}P^{k-1}.$$

Далее будем считать, что $\alpha P<1$. Это ограничение обеспечит конечность математического ожидания. Производя суммирование, получим:

$$\mathbf{L}=(1-\gamma)+P^S\left(\gamma-l+\frac{\beta Q}{1-\alpha P}W_{S+1}\right)=(1-\gamma)+P^S\left(\gamma-l+\frac{\beta Q}{1-\alpha P}\left((l-\gamma)+\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^S\right)\right)=$$
$$=(1-\gamma)+P^S\left((l-\gamma)\frac{m}{1-\alpha P}+\gamma\left(\frac{m}{1-\alpha P}+1\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^S\right).$$

Последнюю формулу можно переписать иначе:

$$P^S\left((1-\gamma)+\frac{m}{1-\alpha P}(l-\gamma)+\gamma\left(1+\frac{m}{1-\alpha P}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}\right)^S\right). \qquad (22)$$

Итак, в рамках стратегии (S7) «полного сопровождения тренда» математическое ожидание для оптимальных долей капитала имеет вид (22). Время открытой позиции стратегии (S7) вычисляется по формуле (6).

Замечание. Из формул (21) и (22) следует, что $\lim_{N\to\infty}\mathbf{L}_N=\mathbf{L}$. Поэтому оптимальные характеристики стратегии (S7) получаются из оптимальных характеристик стратегии (S6) при $N\to\infty$ (т. е. если $\alpha_{TP}=\alpha^N\to\infty$).

Непрерывный ввод капитала. Оптимальные стратегии

Рассмотрим стратегии, использующие постепенный ввод капитала и непрерывно скользящий Stop Loss (т. е. подразумевающие выход по сигналу DrawDown → Stop).

Для того чтобы ограничить риск параметром γ, первоначально купим актив на долю $x_1=\frac{\gamma}{1-\beta}$ имеющегося капитала K_0 и выставим Stop Loss на уровень $C\beta$, где $C=C(0)$ — цена покупки. Дальнейшее управление позицией необходимо разбить на два этапа.

Первый этап — период наращивания открытой позиции. При каждом увеличении текущего максимума цены актива в момент времени t будем докупать акции и поднимать Stop Loss до уровня $\beta\cdot\max\{C(\tau)\mid\tau\in[0,t]\}$ до тех пор, пока не сделаем активным весь допустимый капитал lK_0. Напомним, что l — это допустимое «плечо». Для того чтобы обеспечить максимум доходности, необходимо следить за тем, чтобы в любой возможный момент выхода из позиции убыток был равен ровно $\gamma\cdot 100\%$ (см. оптимальное решение задачи (18)). Поэтому постепенный ввод капитала должен быть также непрерывным.

Второй этап — период ожидания сигнала к продаже без наращивания позиции. При каждом увеличении текущего максимума цены актива в момент времени t будем поднимать Stop Loss до уровня $\beta \cdot \max\{C(\tau) \mid \tau \in [0, t]\}$ до тех пор, пока не произойдет выход из позиции. По существу второй этап — это либо стратегия (S4), либо стратегия (S5). При анализе второго этапа необходимо учесть, что к моменту его начала активный капитал не будет равен lK_0, а увеличится за счет роста цены актива. При этом долг брокеру останется равным $(l-1)K_0$.

Непрерывный ввод капитала при ограничении на риск

Пусть, как и ранее, $C_{\max}(t) = \max\{C(\tau) \mid \tau \in [0, t]\}$. Обозначим через $x = \dfrac{C_{\max}(t)}{C(0)}$ максимальную доходность актива, наблюдаемую за время t после открытия позиции. Если $D(x)$ — капитал, потраченный на акции к моменту времени t, а $A(x)$ — его приращенная стоимость, то $A(x)\beta + K_0 - D(x) = K_0(1-\gamma)$. Если произошло увеличение x на Δx, то $A(x+\Delta x) = A(x)\dfrac{x+\Delta x}{x} + D(x+\Delta x) - D(x)$ и

$$\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}A(x)+\frac{D(x+\Delta x)-D(x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, приходим к уравнению:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{A}{x}+\frac{dD}{dx}.$$

Таким образом, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} A(x)\beta - D(x) = -\gamma K_0, \\ \dfrac{dA}{dx}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{dD}{dx} \end{cases}$$

с ограничениями: $D(1) = \dfrac{\gamma}{1-\beta}K_0$, $\dfrac{\gamma}{1-\beta}K_0 \leqslant D(x) \leqslant lK_0$. Производя решение, найдем:

$$D(x)=K_0\gamma\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}x^{\frac{1}{1-\beta}}\right);\quad A(x)=K_0\cdot\frac{\gamma}{1-\beta}x^{\frac{1}{1-\beta}},\quad \text{где } 1\le x\le \tilde{x}=\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{1-\beta}.$$

Итак, если не произойдет выход по Stop-сигналу, то к моменту окончания первого этапа (периода наращивания открытой позиции) активный капитал составит

$$A(\tilde{x})=K_0\cdot\frac{\gamma}{1-\beta}\tilde{x}^{\frac{1}{1-\beta}}=K_0\cdot\frac{\gamma}{1-\beta}\left(\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{1-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}=K_0\cdot\frac{l-\gamma}{\beta}.$$

Закрытие позиции на первом этапе наступит с вероятностью

$$\mathrm{P}(X_{X_{\mathrm{DD}}(\beta)}<\tilde{x}\beta)=1-\left(\tilde{x}\right)^{r/(\beta^r-1)}=1-\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}.$$

В этом случае доходность будет равна $1-\gamma$, т. е. будет получен убыток $\gamma \cdot 100\%$.

Переходя ко второму этапу (периоду ожидания сигнала к продаже без наращивания позиции), необходимо рассмотреть два случая. Первый случай, соответствующий стратегии (S9), подразумевает выход только по сигналу DrawDown → → Stop. Второй случай, соответствующий стратегии (S8), подразумевает выход либо по DrawDown → Stop, либо по Take Profit. Заметим, что вероятность того, что второй этап наступит, равна

$$\mathrm{P}\left(X_{\mathrm{DD}}(\beta) \geq \tilde{x}\beta\right) = \left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}.$$

Оптимальные параметры стратегии (S9)

В случае наступления второго этапа доходность стратегии (S9) будет случайной величиной с математическим ожиданием:

$$\frac{l-\gamma}{\beta}\cdot \mathrm{E}\left(X_{\mathrm{DD}}(\beta)\right)+1-l = \frac{l-\gamma}{\beta}\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}+1-l = \frac{r(l-\gamma)}{\beta^r+r-1}+1-l.$$

Пусть I — индикаторная функция наступления второго этапа, а X — доходность стратегии (S9). Применяя формулу полного математического ожидания, можно записать:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid I)\big) = \mathrm{P}(I=0)\mathrm{E}(X \mid I=0) + \mathrm{P}(I=1)\mathrm{E}(X \mid I=1).$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}(X) = \left(1-\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}\right)(1-\gamma)+\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}\left(\frac{r(l-\gamma)}{\beta^r+r-1}+1-l\right).$$

Упрощая, получим:

$$\mathrm{E}(X) = (1-\gamma)+(l-\gamma)\frac{1-\beta^r}{\beta^r+r-1}\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}. \qquad (23)$$

Отметим, что при условии $\beta \leqslant (1-r)^{1/r}$ математическое ожидание доходности становится бесконечно большим.

Замечания

1. Другой способ доказательства формулы (23) можно получить следующим образом. В формулу (22) подставим:

$$\mathrm{S} = \left[1+\frac{\ln\big((l-\gamma)(1-\beta)/(\gamma\beta)\big)}{\ln\big((\alpha-\beta)/(1-\beta)\big)}\right] \text{ и } \mathrm{m} = P\alpha + Q\beta - 1,$$

где $P = P_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{1-\beta^r}{\alpha^r-\beta^r}$, $Q = Q_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{1-\alpha^r}{\beta^r-\alpha^r}$.

Теперь, переходя к пределу при $\alpha \to 1+0$, из формулы (22) можно получить формулу (23).

2. Математическое ожидание времени открытой позиции для стратегии (S9), как и для стратегии (S5), вычисляется по формуле (12).

Оптимальные параметры стратегии (S8)

В случае наступления второго этапа доходность стратегии (S8) будет случайной величиной с математическим ожиданием:

$$\frac{l-\gamma}{\beta}\cdot \mathrm{E}\left(X_{\mathrm{DD}\vee\mathrm{TP}}(\beta,\alpha_{\mathrm{TP}}/\tilde{x})\right)+1-l=\frac{l-\gamma}{\beta}\cdot\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}+\left(\frac{\alpha_{\mathrm{TP}}}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\left(1-\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}\right)\right)+1-l.$$

Пусть, как и ранее, I — индикаторная функция наступления второго этапа, а X — доходность стратегии. Тогда

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X\,|\,I)\right)=\mathrm{P}(I=0)\mathrm{E}(X\,|\,I=0)+\mathrm{P}(I=1)\mathrm{E}(X\,|\,I=1)=$$

$$=\left(1-\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}\right)(1-\gamma)+$$

$$+\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{\frac{r(1-\beta)}{\beta^r-1}}\left(\frac{l-\gamma}{\beta}\left(\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}+\left(\frac{\alpha_{\mathrm{TP}}}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\left(1-\frac{r\beta}{\beta^r+r-1}\right)\right)+1-l\right).$$

После преобразований приходим к формуле:

$$\mathrm{E}(X)=(1-\gamma)+(l-\gamma)\tilde{x}^{\frac{r}{\beta^r-1}}\left(\frac{1-\beta^r}{\beta^r+r-1}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{TP}}}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\beta^r+r-1}{\beta^r-1}}\left(1-\frac{\beta r}{\beta^r+r-1}\right)\right), \qquad (24)$$

где $\tilde{x}=\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{1-\beta}$ — доходность актива к началу второго этапа (в последний момент ввода капитала).

Замечания

1. Если в формуле (21) осуществить предельный переход при $\alpha\to 1+0$, то получится другое доказательство формулы (24). Заметим, что технически это значительно сложнее.

2. Математическое ожидание времени открытой позиции для стратегии (S8), как и для стратегии (S4), вычисляется по формуле (16).

3. Связь стратегии (S8) со стратегией (S9) осуществляется при помощи предельного перехода при $\alpha_{\mathrm{TP}}\to\infty$. В частности, при $\alpha_{\mathrm{TP}}\to\infty$ из формулы (24) получается формула (23).

4. Если $\beta^r+r-1=0$, то формула (24) продолжается по непрерывности:

$$\mathrm{E}(X)=(1-\gamma)+\frac{l-\gamma}{\tilde{x}}\left(\ln\frac{\alpha_{\mathrm{TP}}}{\tilde{x}}+\frac{1-\beta}{\beta}\right),\quad \text{где } \beta=(1-r)^{1/r}\quad \text{и}\quad \tilde{x}=\left(\frac{(l-\gamma)(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^{1-\beta}.$$

Примеры оптимальных стратегий с постепенным вводом капитала

Для параметра $\beta=0{,}9867$ рассмотрим характеристики стратегий (S6)—(S9) с ограничением на максимально возможный убыток 1% ($\gamma=0{,}01$). Для стратегий (S6), (S7) положим $\alpha=1{,}009714$. Для стратегий (S6) и (S8) параметр для уровня Take Profit выберем на уровне $\alpha_{\mathrm{TP}}=\alpha^5=1{,}049523$ ($\approx 4{,}95$ %). Произведем вычисления для трех различных значений l.

Характеристики	(S6)	(S7)	(S8)	(S9)
$l = 1$				
M_γ (%)	2,7939	7,0429	1,9980	3,0371
$E(T_{exit})$ (часов)	16,1534	37,3771	11,0357	16,2877
ω_γ (% в час)	0,1730	0,1884	0,1811	0,1866
$l = 2$				
M_γ (%)	4,5582	13,2640	3,4598	5,5291
$E(T_{exit})$ (часов)	16,1534	37,3771	11,0357	16,2877
ω_γ (% в час)	0,2822	0,3549	0,3135	0,3395
$l = 5$				
M_γ (%)	7,0429	28,5166	6,1702	11,2961
$E(T_{exit})$ (часов)	16,1534	37,3771	11,0357	16,2877
ω_γ (% в час)	0,4360	0,7629	0,5591	0,6935

Таким образом, стратегии с полным сопровождением тренда (отсутствие Take Profit) оказываются более эффективными:

$$(S6) < (S7) \quad \text{и} \quad (S8) < (S9).$$

Даже при отсутствии «плеча» ($l = 1$) стратегии с постепенным вводом капитала обгоняют по эффективности стратегии с одномоментным вводом капитала. При этом (для любого плеча) максимально возможный риск для оптимальных стратегий остается ограниченным величиной $\gamma \cdot 100\%$.

Заключение

В качестве заключения сделаем ряд замечаний.

1. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы об управлении капиталом на трендовых участках рынка при ограничении на возможный убыток:

- более эффективной оказываются стратегии с постепенным вводом капитала (дискретным или непрерывным);
- оптимальной тактикой ввода капитала является правило: на этапе наращивания открытой позиции выход из рынка должен доставлять максимально допустимый убыток;
- полное сопровождение тренда оказывается эффективнее его частичного сопровождения. То есть лучшая тактика выхода из позиции не подразумевает наличие Take Profit. Таким образом, имеет смысл планировать выход либо по сигналу скользящего Stop Loss, либо по сигналу DrawDown → Stop.

2. Отметим, что анализ стратегий проводился без учета транзакционных издержек. При учете транзакционных издержек оптимизационная задача (18) будет иметь несколько другой вид. Решение этой задачи и соответствующие характеристики оптимальных стратегий находятся по аналогии с рассмотренным случаем. Важно отметить, что при этом выводы из пункта 1 останутся актуальными. Уместно заметить, что на рынке присутствуют трейдеры, которые не несут транзакционных издержек (например, брокер).

3. Если использование «плеча» подразумевает кредитные издержки, то условие того, что максимально возможный убыток не превзойдет $\gamma \cdot 100\%$, не может быть удовлетворено в рамках рассматриваемых стратегий. Действительно, вре-

мя открытой позиции является случайной величиной с бесконечным спектром значений. Поэтому при достаточно долгом нахождении в позиции плата за кредит теоретически может привести к любому убытку. Таким образом, чтобы ограничить возможный убыток в рамках рассматриваемых стратегий, следует отказаться от маржинальной торговли, выбрав в расчетах $l = 1$.

4. Модель геометрического броуновского движения не является идеальным описанием реального рынка. Поэтому всегда присутствует риск неправильной идентификации модели или ошибочно оценки ее параметров.

Источники

Гисин В. Б., Коннов В. В., Шаров В. Ф. Вероятностные модели для анализа ценообразования активов на фондовых рынках: монография. М., 2012.

Коннов В. В. Вероятностный подход к расчету Stop-приказов. Финансовые рынки: модели, риски, решения // Материалы I Международной научно-практической интернет-конференции. 15 ноября — 15 декабря 2011 г. / Воронежский государственный университет, Международный институт компьютерных технологий. Воронеж, 2011. С. 49—56.

Пенджер Х., Бойль Ф., Гербер Х., Дюфрень Д. [и др.] Финансовая экономика. М., 2005.