

**А. В. Воронцовский**

докт. экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета

**А. Ю. Дикарев**

канд. экон. наук, ведущий специалист финансово-экономического отдела дирекции проектов государственно-частного партнерства СПб ГБУ «Агентство стратегических инвестиций»

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В РЕЖИМЕ ИМИТАЦИИ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ДЛЯ МАЛОЙ ОТКРЫТОЙ ЭКОНОМИКИ**

В данной статье предлагается постановка стохастической экономико-математической модели экономического роста для малой экономики и рассматриваются возможности формирования аппроксимирующих траекторий роста макроэкономических показателей в режиме имитации. В процессе моделирования экономического роста достаточно широкое применение нашли модели роста для стран с малой открытой экономикой. Для них, с одной стороны, предполагается нарушение равенства внутренних сбережений и инвестиций за счет притока капитала из внешних рынков или инвестирования излишков капитала на внешних рынках, развитие экспорта и импорта товаров и услуг. В этом смысле это страны с открытой экономикой. При этом размер их экономики относительно мал. Они не могут оказывать какое-либо воздействие на цены экспортируемой или импортируемой продукции; на ставки процента на внешних финансовых рынках, преобладающих на международных рынках капитала, на которых индивидуумы, компании и правительства данной страны осуществляют заимствования и предоставляют займы за пределы своих государств (Абель, Бернанке, 2011, с. 246). При моделировании внешних связей стран с малой открытой экономикой используются две основные предпосылки относительно указанных выше ставок процента. Во-первых, эта ставка предполагается постоянной во времени, и, во-вторых, изменения значений подобных ставок происходят независимо от экономических условий стран с малой экономикой. То же предполагается и относительно цен экспортируемой продукции или продукции, получаемой по импорту.

При постановке рассматриваемой модели были использованы отдельные компоненты разработанных в современной литературе постановок стохастических моделей экономического роста. При постановке рассматриваемой модели экономического роста был использован ряд работ зарубежных экономистов,

в том числе С. Дж. Тарновского, П. Ричарда, Э. Гринольса и др. (Benavie, Grinols, Turnovsky, 1996; Getachew, 2010; Grinols, Turnovsky, 1996; Stulz, 1986). Выбранные условия и ограничения были дополнены в процессе постановки задачи дополнительными соотношениями и зависимостями. Основное внимание при построении рассматриваемой модели было уделено описанию макроэкономических процессов, происходящих в рассматриваемой стране, однако при постановке модели были использованы, как это принято при современном макроэкономическом моделировании, некоторые микроэкономические принципы и подходы. В том числе речь идет о различных производственных функциях рассматриваемых отраслей с учетом параметров работы конкретных компаний (Воронцовский, 2010; Воронцовский и др., 2011).

Сформулируем основные предпосылки рассматриваемой модели роста:

- рассматривается стохастическая модель экономического роста для страны с малой открытой экономикой, в которой основные макроэкономические показатели зависят от случайных переменных. Для моделирования случайных переменных используются приращения стандартных винеровских процессов. Стоимость акций и динамика ставки заработной платы описываются уравнением геометрического броуновского движения;

- в рамках модели рассматривается несколько типов агентов, каждый из которых действует рационально, в том числе компании-производители, домашние хозяйства; государство; иностранные или внешние агенты для данной страны;

- предполагается, что домашние хозяйства поставляют ресурсы на рынок труда и покупают потребительскую продукцию и акции компаний при их эмиссии. Критерием оптимальности является функция дисконтированной полезности на бесконечном периоде;

- компании проводят первичное размещение акций, вторичный рынок акций ценных бумаг не рассматривается;

- недостаток средств государственного бюджета компенсируется размещением государственных облигаций внутри страны и за границей, а излишек используется для покупки иностранных государственных облигаций;

- все операции с внутренними и иностранными облигациями ограничены во времени продолжительностью выбранного единичного временного интервала. Поскольку рассматривается модель малой экономики, то предполагается, что всегда найдутся иностранные инвесторы, которые уравновесят спрос на облигации обоих видов;

- в каждый отдельный момент времени для конкретного вида продукции может иметь место либо экспорт отечественных образцов продукции данного вида, либо импорт иностранных аналогов, причем иностранные агенты всегда могут скупить излишки товара или покрыть его нехватку импортом, обеспечивая равенство спроса и предложения;

- с точки зрения потребления отечественная и иностранная продукция одного вида равнозначна;

- при определении объемов выпуска, размеров государственных закупок используются соотношения, определяющие объемы выпуска или иные показатели за единичный промежуток времени. Предполагается, что размеры выпуска за рассматриваемый промежуток времени не зависят напрямую от объемов выпуска за предыдущие временные интервалы: объемы выпуска продукции каждого вида в первую очередь зависят от размеров капитала и затрачиваемого труда;

- пополнение капитала компаний происходит за счет нераспределенной прибыли и дополнительной эмиссии акций. Эмиссия дополнительных акций осуществляется только при условии наличия положительной чистой прибыли у компаний.

Рассмотрим деятельность агентов модели более подробно. Первую группу агентов образуют компании — производители различных товаров и услуг. Всего в рамках рассматриваемой экономики выделяется  $J$  отраслей. Компании выступают в роли продавцов на соответствующих рынках товаров и услуг, создают спрос на рабочую силу, осуществляют эмиссию акций и выплату дивидендов по ним. Каждая отрасль выпускает один вид продукции. Это означает, что она представлена единственной фирмой, масштабы которой совпадают с размерами соответствующей отрасли. В подобных моделях часто учитывают возможности развития производства за счет кредитования (Chatterjee, Turnovsky, 2007, p. 512), но в рассматриваемой модели они не учитываются.

Вторую группу агентов в экономической системе составляют домашние хозяйства, которые обеспечивают предложение труда, потребляют товары и услуги, покупают акции фирм-производителей.

Третья разновидность агентов в рассматриваемой модели — государство, которое присутствует на рынке товаров и услуг, осуществляя различные государственные закупки. Государство занимается сбором налогов с компаний-производителей и населения, а дефицит бюджета компенсирует эмиссией государственных облигаций; в случае профицита государственного бюджета его средства используются для покупки иностранных облигаций.

Четвертая группа агентов — иностранные агенты, которые продают различные иностранные продукты или оказывают услуги, а также проводят операции с внутренними и иностранными облигациями. Поскольку модель описывает малую экономику, то предполагается, что излишки спроса и предложения на рынке товаров и услуг всегда будут реализованы.

Указанные агенты взаимодействуют в системе рынков. В модели предполагается наличие различных рынков: труда, товаров и услуг, акций, облигаций. На рынке труда экономически активное население распределяется по существующим отраслям. На рынке товаров и услуг производимые товары покупаются домохозяйствами или государством, а излишки или недостатки товара компенсируются экспортом или импортом (Turnovsky, 1999, p. 877). Предполагается, что рынок акций представлен только первичным рынком, где фирмы-производители размещают свои акции. На рынке облигаций присутствуют только государство и иностранные агенты, выпускающие свои ценные бумаги при возникновении дефицита средств.

Рассмотрим условия и ограничения, которые предлагается учитывать при моделировании поведения агентов моделей экономического роста. В подобных моделях производственная функция для определения выручки фирм-производителей обычно задается в виде АК-функции (Asea, Turnovsky, 1998, p. 60)<sup>1</sup>. Однако в данной статье будем учитывать труд в явном виде путем добавления компоненты, характеризующей объем и качество труда. Кроме того, будем считать, что производственная функция определяет количество выпускаемой продукции в натуральных единицах, а не ее стоимость. Это необходимо для учета цен на отечественную и иностранную продукцию одного вида.

Обозначим через  $dY_j(t)$  продукцию вида  $j$ , производимую за достаточно малый промежуток времени  $dt$ ;  $K_j(t)$  — совокупный капитал компаний отрасли  $j$  в момент времени  $t$ ;  $L_j(t)$  — объем затрат труда в условных единицах, используемый в отрасли  $j$  в момент времени  $t$ ;  $\sigma_{y,j}$  — волатильность объема выпуска продукции вида  $j$ ;  $A_j$  — технологический коэффициент отрасли  $j$ ;  $\delta_j$  — числовой коэффициент производственной функции отрасли  $j$ ;  $j = 1, 2, \dots, J$ , где  $J$  — число рассматриваемых отраслей.

<sup>1</sup> Подробнее о производственных функциях в моделях роста см. статьи (Mondal, Gupta, 2009; Rao, 2010; Prommeret, Smith, 2005).

Тогда производственную функцию  $j$ -й отрасли с учетом случайного фактора запишем так:

$$dY_j(t) = A_j L_j^{\delta_j}(t) K_j^{1-\delta_j}(t) [dt + \sigma_{y,j} dw(t)], \quad j = 1, \dots, J, \quad (1)$$

где  $dw(t)$  — приращение стандартного винеровского процесса.

Согласно условиям модели в рамках отдельной отрасли может существовать только импорт или только экспорт продукции заданного вида. Таким образом, на отечественном рынке может продаваться либо только продукция отечественного производства, либо отечественная и иностранная продукция одновременно. Поскольку иностранные агенты уравнивают каждый рынок товаров и услуг, то справедливо следующее соотношение:

$$dY_j(t) + dIm_j(t) = C_j(t)dt + dG_j(t) + dEx_j(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad (2)$$

где  $dEx_j(t)$  — количество экспортируемой продукции вида  $j$  за время  $dt$ ;  $C_j(t)$  — количество потребляемой домашними хозяйствами продукции вида  $j$  в момент  $t$ ;  $dG_j(t)$  — количество покупаемой государством продукции вида  $j$  за время  $dt$ ;  $dIm_j(t)$  — количество импортируемой продукции вида  $j$  за время  $dt$ .

Объемы потребления являются изменяемым параметром, который подбирается так, чтобы получить экстремум целевой функции. Значения экспорта и импорта определяются таким образом, чтобы обеспечить выполнение данного соотношения.

Обозначим цены потребляемой в момент  $t$  отечественной и иностранной продукции вида  $j$  через  $P_{\text{вн.тов},j}(t)$  и  $P_{\text{ин.тов},j}(t)$  соответственно. Они изменяются в соответствии с выбранным стохастическим дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{dP_{\text{вн.тов},j}(t)}{P_{\text{вн.тов},j}(t)} = r_{\text{вн.тов},j}dt + \sigma_{\text{вн.тов},j}dw(t); \quad (3)$$

$$\frac{dP_{\text{ин.тов},j}(t)}{P_{\text{ин.тов},j}(t)} = r_{\text{ин.тов},j}dt + \sigma_{\text{ин.тов},j}dw(t), \quad (4)$$

где  $r_{\text{вн.тов},j}$  и  $r_{\text{ин.тов},j}$  — параметры сноса в уравнении динамики цены отечественного товара вида  $j$  и его зарубежного аналога, а  $\sigma_{\text{вн.тов},j}$  и  $\sigma_{\text{ин.тов},j}$  — волатильность цены отечественного товара вида  $j$  и его зарубежного аналога соответственно (Turnovsky, Grinols, 1996, p. 690).

Для увеличения капитала фирмы-производителей товаров или услуг каждой отрасли могут эмитировать новые акции<sup>1</sup>. Предполагается, что во времени стоимость акций фирм изменяется согласно стохастическому уравнению геометрического броуновского движения со значениями дрейфа  $r_{\text{акц},j}$  и волатильности  $\sigma_{\text{акц},j}$  соответственно:

$$dP_{\text{акц},j}(t) = r_{\text{акц},j}P_{\text{акц},j}(t)dt + \sigma_{\text{акц},j}P_{\text{акц},j}(t)dw(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad (5)$$

где  $P_{\text{акц},j}(t)$  — стоимость акций компаний  $j$ -й отрасли экономики рассматриваемой страны в момент времени  $t$ .

Другим параметром деятельности фирм, который изменяется стохастическим образом, является ставка заработной платы, которую для фирмы отрасли  $j$  обозначим через  $v_j(t)$ . Изменение данной ставки также описывается уравнением геометрического броуновского движения:

<sup>1</sup> В принципе можно рассмотреть и возможности инвестирования нераспределенной прибыли.

$$dv_j(t) = r_{v,j}(t)dt + \sigma_{v,j}(t)dw(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad (6)$$

где  $r_{v,j}$  — значение дрейфа для уравнения ставки заработной платы;  $\sigma_{v,j}$  — волатильность этой ставки.

При моделировании домашних хозяйств предполагается, что величина трудовых ресурсов (численность занятых в производстве), поставляемых домашними хозяйствами, не является постоянной, а ее динамика может быть описана с помощью стохастического уравнения следующего вида:

$$dL(t) = r_L L(t)dt + \sigma_L L(t)dw(t), \quad (7)$$

где  $r_L$  — значение дрейфа в уравнении динамики численности занятых в производстве при отсутствии внешних воздействий;  $\sigma_L$  — волатильность численности занятых в производстве;  $L(t)$  — совокупный объем трудовых ресурсов в момент времени  $t^1$ .

При постановке рассматриваемой модели рассматривается задача оптимизации потребления домашних хозяйств. Классическим вариантом целевой функции для подобных моделей экономического роста, учитывающих только один вид потребляемой продукции (например, с номером  $j_0$ ), является дисконтированная функция полезности, заданная на бесконечном периоде, которую запишем так:

$$E \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} C_{j_0}(t)^\gamma e^{-\rho t} dt \rightarrow \max, \quad (8)$$

где  $\gamma$  — параметр, отражающий несклонность к риску;  $\rho$  — коэффициент временного предпочтения (Benavie, Grinols, Turnovsky, 1998, p. 80).

Далее, при построении дискретной аппроксимации условий рассматриваемой модели будет учтено наличие нескольких видов продукции потребления.

Роль государства как агента в рассматриваемой модели заключается в сборе налогов и осуществлении государственных закупок. Излишек или недостаток средств государственного бюджета государство будет компенсировать за счет эмиссии облигаций и размещения их за пределами страны или за счет покупки иностранных облигаций. Если государственный бюджет оказался в предыдущем периоде дефицитным, то недостаток средств государство может компенсировать за счет выпуска новых облигаций. Число эмитируемых облигаций в момент  $t$  определяется ценой облигаций при эмиссии  $P_{\text{вн.обл.}}(t)$ :

$$Q_{\text{вн.обл.}}(t) = \frac{-Z_G(t)}{P_{\text{вн.обл.}}(t)}, \quad \text{если } Z_G(t) < 0, \quad (9)$$

где  $P_{\text{вн.обл.}}(t)$  — стоимость облигаций, эмитируемых государством в момент  $t$ ;  $Q_{\text{вн.обл.}}(t)$  — количество государственных облигаций, эмитируемых в момент времени  $t$ ;  $Z_G(t)$  — дефицит ( $Z_G(t) < 0$ ) или профицит ( $Z_G(t) > 0$ ) государственного бюджета в момент времени  $t$ .

Если же доходы государства превышают его расходы, то государство покупает облигации иностранных компаний в следующем размере:

$$Q_{\text{инн.обл.}}(t) = \frac{Z_G(t)}{P_{\text{инн.обл.}}(t)}, \quad \text{если } Z_G(t) \geq 0, \quad (10)$$

где  $Q_{\text{инн.обл.}}(t)$  — количество покупаемых иностранных облигаций в момент времени  $t$ ;  $P_{\text{инн.обл.}}(t)$  — цена иностранных облигаций в момент времени  $t$ .

<sup>1</sup> В общем случае также необходимо рассматривать уравнение для динамики населения в целом, особенно в том случае, когда рассматривается удельное потребление.

Тогда остаток денежных средств государственного бюджета на начало периода  $t + dt$  можно определить как разность между налоговыми поступлениями и доходами от эмиссии облигаций и расходами на государственные закупки и прочими расходами. Если учесть условие (9), предполагающее выпуск собственных облигаций на сумму, равную дефициту бюджета, то рассматриваемое ограничение можно записать так:

$$Z_G(t + dt) = \sum_{j=1}^J dT_j(t) + dT_{\text{дом}}(t) - \sum_{j=1}^J dG_j(t) + Q_{\text{вн. обл.}}(t)P_{\text{вн. обл.}}(t) - Q_{\text{обл.}}(t)\hat{P}_{\text{обл.}}(t + dt) - dM_{\text{гос}}(t), \quad \text{если } Z_G(t) < 0, \quad (11)$$

где  $dT_j(t)$  — налоги, уплачиваемые  $j$ -й отраслью за период времени  $dt$ ;  $dT_{\text{дом}}(t)$  — налоги, уплачиваемые домашними хозяйствами за период времени  $dt$ ;  $\hat{P}_{\text{вн. обл.}}(t + dt)$  — номинальная стоимость внутренних облигаций, погашаемых в момент времени  $t + dt$ ;  $dM_{\text{гос}}(t)$  — государственные расходы, кроме госзакупок, за период времени  $dt$ .

В том случае, когда имеется профицит государственного бюджета, государство его может израсходовать на приобретение иностранных облигаций. Тогда учитывая условие (10), аналогичное ограничение имеет вид:

$$Z_G(t + dt) = \sum_{j=1}^J dT_j(t) + dT_{\text{дом}}(t) - \sum_{j=1}^J dG_j(t) - Q_{\text{ин. обл.}}(t)P_{\text{ин. обл.}}(t) + Q_{\text{ин. обл.}}(t)\hat{P}_{\text{ин. обл.}}(t + dt) - dM_{\text{гос}}(t), \quad \text{если } Z_G(t) > 0, \quad (12)$$

где  $\hat{P}_{\text{ин. обл.}}(t + dt)$  — номинальная стоимость иностранных облигаций, погашаемых в момент времени  $t + dt$ .

При формировании соотношений (11) и (12) предполагается, что и внутренние облигации эмитируются, а иностранные — покупаются в начале одного периода, а погашаются и те и другие в начале следующего. Определенная модификация условий (11) и (12) может быть связана с учетом приращений налоговых платежей и государственных расходов за период времени  $dt$ .

В литературе предлагают при формировании подобных ограничений учитывать доходность облигаций. Тогда, если предположить, что иностранные облигации можно продать до срока погашения и учесть суммарный размер налогов, то ограничение вида (12) можно записать в форме, которая позволяет учитывать доходность иностранных облигаций:

$$Z_G(t + dt) = -dG(t) + dT(t) - dM_{\text{гос}}(t) + (P_{\text{ин. обл.}}(t)Q_{\text{ин. обл.}}(t))(1 + dR_b(t)), \quad (13)$$

где  $dG(t)$  — объемы совокупных государственных закупок за время  $dt$ ;  $dT(t)$  — совокупный размер собираемых государством налогов за время  $dt$ ;  $dR_b(t)$  — доходность государственных облигаций за время  $dt$ .

Соотношение (13) представляет собой непрерывную модификацию соотношений вида (10) или (12), обусловленную учетом изменения доходности облигаций во времени (Asea, Turnovsky, 1996, p. 62). Соотношение (13) также опирается на предположение, что длительность периода до погашения иностранных облигаций может быть больше выделенного единичного периода.

Объем государственных закупок зависит от множества разнообразных факторов: экономической ситуации в стране и на мировых рынках, от текущих потребностей государства или стремления поддержать ту или иную отрасль. По аналогии с определением вида производственной функции объем государственных закупок будем определять в количественном выражении. Будем считать,

что размеры государственных закупок товара вида  $j$  определяются на основе формулы производственной функции в следующей форме:

$$dG_j(t) = A_j L_j^{\delta_j}(t) K_j^{1-\delta_j}(t) [g_j dt + g'_j \sigma_{y,j} dw(t)], \quad j = 1, \dots, J, \quad (14)$$

где коэффициенты  $g_j, g'_j$  характеризуют долю постоянной и случайной части производимой продукции вида  $j$ , которую покупает государство (Turnovsky, Chattopadhyay, 2003, p. 879).

Предлагаемая стохастическая экономико-математическая модель экономического роста для малой экономики обеспечивает максимизацию дисконтированной функции полезности потребления на бесконечном периоде при выполнении ограничений на выпуск продукции каждой отрасли и ее распределение с учетом импортируемой иностранной продукции; динамики цен внутренней и внешней продукции; динамики трудовых ресурсов и ставки заработной платы; динамики налогов; а также на сальдо государственного бюджета с учетом операций государства с внутренними и иностранными облигациями.

Тогда, учитывая ограничения (2)–(7), (9)–(12) и (14) и используя целевую функцию в форме (8), основные ограничения рассматриваемой модели экономического роста с учетом непрерывного времени и случайного фактора в форме приращения стандартного винеровского процесса можно представить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} C_{j_0}(t)^\gamma e^{-\rho t} dt \rightarrow \max; \\ dY_j(t) = A_j L_j^{\delta_j}(t) K_j^{1-\delta_j}(t) [dt + \sigma_{y,j} dw(t)], \quad j = 1, \dots, J; \\ dG_j(t) = A_j L_j^{\delta_j}(t) K_j^{1-\delta_j}(t) [g_j dt + g'_j \sigma_{y,j} dw(t)], \quad j = 1, \dots, J; \\ dY_j(t) + dIm_j(t) = C_j(t) dt + dG_j(t) + dEx_j(t), \quad j = 1, \dots, J; \\ \frac{dP_{\text{вн.тов},j}(t)}{P_{\text{вн.тов},j}(t)} = r_{\text{вн.тов},j} dt + \sigma_{\text{вн.тов},j} dw(t); \\ \frac{dP_{\text{ин.тов},j}(t)}{P_{\text{ин.тов},j}(t)} = r_{\text{ин.тов},j} dt + \sigma_{\text{ин.тов},j} dw(t); \\ dP_{\text{акц},j}(t) = r_{\text{акц},j} P_{\text{акц},j}(t) dt + \sigma_{\text{акц},j} P_{\text{акц},j}(t) dw(t), \quad j = 1, \dots, J; \\ dv_j(t) = r_{v,j} v_j(t) dt + \sigma_{v,j} v_j(t) dw(t), \quad j = 1, \dots, J; \\ dL(t) = r_L L(t) dt + \sigma_L L(t) dw(t); \\ Z_G(t + dt) = \sum_{j=1}^J dT_j(t) + dT_{\text{дом}}(t) - \sum_{j=1}^J dG_j(t) - \\ - Q_{\text{вн.обл}}(t) (\hat{P}_{\text{вн.обл}}(t + dt) - P_{\text{вн.обл}}(t)), \quad \text{если } Z_G(t) < 0; \\ Z_G(t + dt) = \sum_{j=1}^J dT_j(t) + dT_{\text{дом}}(t) - \sum_{j=1}^J dG_j(t) + \\ + Q_{\text{ин.обл}}(t) (\hat{P}_{\text{ин.обл}}(t + dt) - P_{\text{ин.обл}}(t)), \quad \text{если } Z_G(t) > 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Модель (15) охватывает только часть соотношений и зависимостей, которые используются при современной постановке стохастических моделей экономического роста. В принципе при постановке моделей вида (15) можно рассмотреть различные задачи для учитываемых групп агентов; ввести дополнительные ограничения, отражающие те или иные закономерности макроэкономического развития, преобразовать целевую функцию и т. п. Объем статьи не позволяет сделать это более детально.

Для проведения экспериментальных расчетов и построения стохастических траекторий роста в режиме имитации будем использовать дискретные приближения ограничений модели (15). Для построения дискретной аппроксимации ограничений модели в форме рекуррентных соотношений эти ограничения были преобразованы с учетом свойства стандартных винеровских процессов (Кузнецов, 2007). Выбор типа используемого вида приближения определяется возможностью представить изменяемую стохастическим образом переменную как функцию от значений других переменных. При построении траекторий макроэкономических показателей в режиме имитации будем рассматривать временную решетку с постоянным временным шагом. Пусть  $\Delta$  — длительность единичного временного шага;  $\tau$  — номер узла временной решетки;  $T$  — общее число учитываемых узлов,  $\tau = 1, 2, \dots, T$ . Необходимым условием построения траекторий роста на основе дискретного приближения ограничений модели является возможность определить значение рассматриваемой переменной через другие переменные не только на единичном периоде (шаге временной решетки), но и в каждом ее узле.

В зависимости от формы ограничений модели для них возможно различное формирование приближенных дискретных рекуррентных соотношений. В моделях данного типа можно выделить три группы исходных ограничений, учитывающие случайные переменные. В зависимости от их вида можно построить дискретную аппроксимацию соответствующих ограничений, на основе которой будут проведены экспериментальные расчеты траекторий роста в режиме имитации.

Во-первых, можно выделить соотношения, в которых рассматриваемый макроэкономический показатель, моделируемый с учетом стохастической переменной, представлен только в абсолютной форме, и которые не содержат его темп роста. Например, в модели полагается, что фирмы производят единственный вид продукта, а объемы производства описываются производственной функцией (1), которая учитывает абсолютный объем выпуска продукции. В этом случае можно показать, учитывая свойства приращений винеровского процесса и интегрируя правую и левую части соотношения (1), что в дискретном виде приближенное выражение этой функции в форме рекуррентного соотношения имеет следующий вид:

$$\bar{Y}_j(\tau) = A_j \bar{L}_j^{\delta_j}(\tau) K_j^{1-\delta_j}(\tau) [\Delta + \sigma_{y,j} \sqrt{\Delta} \xi_{y,j}(\tau)], \quad \tau = 1, \dots, T; j = 1, \dots, J, \quad (16)$$

где  $\bar{Y}_j(\tau)$  — количество продукции вида  $j$ , произведенной за период времени от узла временной решетки  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $K_j(\tau)$  — капитал компаний отрасли  $j$  в узле временной решетки  $\tau$ ;  $\bar{L}_j(\tau)$  — объем используемого труда в условных единицах в отрасли  $j$  на единичном интервале от узла временной решетки  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $\xi_{y,j}(\tau)$  — реализация стандартной нормальной случайной величины, используемой при описании перехода от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$  для динамики объемов выпуска продукции  $j$ -й отрасли (Воронцовский, 2010, с. 116).

Во-вторых, можно выделить стохастические ограничения, которые учитывают не только абсолютное значение рассматриваемого показателя, определяемого с учетом стохастической переменной, но и его темп роста (см., напр., уравнения (3) и (4)), или такие ограничения, которые могут быть преобразованы к виду, учитывающему этот темп роста (см., напр., соотношение (5)). В этом случае можно показать, что дискретное приближение в форме рекуррентного соотношения для уравнений подобного типа можно представить в следующих двух формах.

Одну из них можно получить путем интегрирования правой и левой частей соответствующего ограничения, учитывающего темп роста рассматриваемого



макроэкономического показателя как приращение стандартного винеровского процесса. Этот вариант дискретного рекуррентного соотношения, аппроксимирующего уравнение для цен внутренних товаров (3), можно записать так:

$$P_{\text{вн.тов.},j}(\tau + 1) = P_{\text{вн.тов.},j}(\tau)e^{r_{\text{вн.тов.},j}\Delta + \sqrt{\Delta}\xi_{\text{вн.тов.},j}(\tau)\sigma_{\text{вн.тов.},j}}, \tau = 1, \dots, T - 1; j = 1, \dots, J, \quad (17)$$

где  $P_{\text{вн.тов.},j}(\tau)$  — стоимости потребляемой отечественной продукции вида  $j$  при наступлении узла временной решетки с номером  $\tau$ ;  $\xi_{\text{вн.тов.},j}(\tau)$  — реализация стандартной нормальной случайной величины, используемой при описании перехода от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$  для динамики цен внутренней продукции  $j$ -й отрасли.

Более сложная форма рекуррентного соотношения для данного уравнения может быть получена в процессе преобразования исходного уравнения с учетом леммы Ито. Учитывая это преобразование, можно показать, что вторая форма рекуррентного соотношения для дискретного приближения уравнений цен внутренних товаров может быть записана в следующем виде:

$$P_{\text{вн.тов.},j}(\tau + 1) = P_{\text{вн.тов.},j}(\tau)e^{(r_{\text{вн.тов.},j} - 0,5\sigma_{\text{вн.тов.},j}^2)\Delta + \sqrt{\Delta}\xi_{\text{вн.тов.},j}(\tau)\sigma_{\text{вн.тов.},j}}, \tau = 1, \dots, T - 1; j = 1, \dots, J, \quad (18)$$

Соответствующее формальное обоснование формулы (18) носит достаточно сложный характер, а ее основное отличие связано с дополнительным учетом волатильности в показателе степени экспоненты (Воронцовский и др., 2011, с. 165—168).

Третья группа соотношений характеризует условия взаимодействия агентов рассматриваемой модели на рынке. В задаче (15) к ним относятся ограничения, учитывающие спрос и предложение на продукцию, взаимодействия государства с фирмами и населением по поводу налогов и размещения внутренних облигаций, а также взаимоотношения с иностранными агентами по поводу покупки иностранных облигаций. Особенность преобразования подобных ограничений связана с тем, что подобные соотношения могут либо учитывать сразу несколько случайных переменных, либо их вообще не содержать.

В литературе при постановке стохастических моделей роста выделяют также еще одну группу соотношений в моделях вида (15), которые используются в процессе дискретного преобразования ограничений модели и формируются на основе условий равновесия в данной модели (Turnovsky, 1996, р. 434—435). Для их определения используется стохастическое уравнение Беллмана (Dixit, Pindyck, 1994, р. 105—106). Условия равновесия часто можно использовать для определения дополнительных макроэкономических показателей, которые в обычной государственной или международной статистике не представлены. Подобные условия в данной статье не рассматриваются.

Уточним список используемых обозначений, поскольку при записи дискретной формы рассматриваемой модели учитывается два вида параметров. Одни характеризуют значения макроэкономических показателей в узлах временной решетки, а другие — за единичный период равный шагу временной решетки. Кроме того, необходимо учесть, что расчеты в режиме имитации будут осуществляться последовательно по узлам временной решетки. Чтобы это учесть, введем дополнительные обозначения:  $\bar{G}_j(\tau)$  — количество товара вида  $j$ , закупаемого государством за единичный период времени при переходе от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$ ;  $\bar{E}x_j(\tau)$ ,  $\bar{I}m_j(\tau)$ ,  $\bar{C}_j(\tau)$  — объем экспорта, размер импорта, объем потребления продукции вида  $j$  за тот же период при переходе от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$ ;  $P_{\text{ин.тов.},j}(\tau)$  — стоимость потребляемой иностранной продукции вида  $j$ , при наступлении узла временной решетки с номером  $\tau$ ;  $\xi_{\text{ин.тов.},j}(\tau)$  — реализации стандартной нормаль-

ной случайной величины, отвечающие за возмущение при пересчете стоимости иностранного товара вида  $j$  от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$ ;  $\xi_{\text{акц},j}(\tau)$  — реализации стандартной нормальной случайной величины для передачи возмущающих факторов динамики цены акций компаний отрасли  $j$  при описании рекуррентного перехода от узла  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $\xi_{v,j}(\tau)$  — реализация стандартной нормальной случайной величины при описании перехода ставки заработной платы в  $j$ -й отрасли от узла  $\tau$  к узлу  $\tau + 1$ ;  $\hat{P}_{\text{вн.обл}}(\tau + 1)$  — номинальная цена внутренних облигаций, эмитируемых государством и погашаемых в момент времени  $\tau + 1$ ;  $\hat{P}_{\text{ин.обл}}(\tau + 1)$  — номинальная стоимость иностранных облигаций, погашаемых в момент времени  $\tau + 1$ ;  $Q_{\text{вн.обл}}(\tau)$  — количество внутренних облигаций, эмитируемых в момент  $\tau$ ;  $Q_{\text{ин.обл}}(\tau)$  — количество иностранных облигаций, покупаемых в момент  $\tau$ ;  $\bar{T}_{\text{дом}}(\tau)$  — налоговые сборы с домашних хозяйств за единичный период времени от  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $Z_G(\tau + 1)$  — сальдо государственного бюджета в момент  $\tau + 1$ , по результатам деятельности за период времени от  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $\xi_L(\tau)$  — реализация стандартной нормальной величины, отвечающая за возмущение при пересчете численности занятых в производстве между узлами временной решетки с номерами  $\tau$  и  $\tau + 1$ ;  $m_j$  — весовой коэффициент, определяющий соотношение полезностей товаров различных отраслей;  $\bar{L}(\tau)$  — совокупный объем используемого труда во всех отраслях на единичном интервале времени от узла временной решетки  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $P_{\text{акц},j}(\tau)$  — стоимость акций условной компании отрасли  $j$  в момент времени  $\tau$ ;  $\bar{T}_j(\tau)$  — налоги, собираемые со всех компаний из отрасли  $j$  за время от  $\tau$  до  $\tau + 1$ ;  $v_j(\tau)$  — ставка заработной платы в отрасли  $j$  в узле  $\tau$ .

Учитывая введенные дополнительные обозначения после соответствующего преобразования всех ограничений задачи (15) с учетом условий (16) и (18) и модификации целевой функции задачи (15), ее приближенную форму, основанную на дискретной аппроксимации исходных условий, можно записать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^J E \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} \bar{C}_j(\tau)^{m_j} e^{-\rho(\tau-1)\Delta} \rightarrow \max; \\ \bar{Y}_j(\tau) = A_j \bar{L}_j^{\delta_j}(\tau) K_j^{1-\delta_j}(\tau) [\Delta + \sigma_{y,j} \xi_{y,j}(\tau)], \quad \tau = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J; \\ \bar{G}_j(\tau) = A_j \bar{L}_j^{\delta_j}(\tau) K_j^{1-\delta_j}(\tau) [g_j \Delta + g_j' \sqrt{\Delta} \xi_{y,j}(\tau)], \quad \tau = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J; \\ \bar{Y}_j(\tau) = \bar{C}_j(\tau) + \bar{G}_j(\tau) + \bar{E}x_j(\tau) - \bar{I}m_j(\tau), \quad \tau = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, J; \\ P_{\text{вн.тов},j}(\tau + 1) = P_{\text{вн.тов},j}(\tau) e^{(r_{\text{вн.тов},j} - 0,5\sigma_{\text{вн.тов},j}^2)\Delta + \sqrt{\Delta} \xi_{\text{вн.тов},j}(\tau) \sigma_{\text{вн.тов},j}}, \\ \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ P_{\text{ин.тов},j}(\tau + 1) = P_{\text{ин.тов},j}(\tau) e^{(r_{\text{ин.тов},j} - 0,5\sigma_{\text{ин.тов},j}^2)\Delta + \sqrt{\Delta} \xi_{\text{ин.тов},j}(\tau) \sigma_{\text{ин.тов},j}}, \\ \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ \xi_{\text{вн.тов},j}(\tau) = \xi_{\text{ин.тов},j}(\tau), \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ P_{\text{акц},j}(\tau + 1) = P_{\text{акц},j}(\tau) e^{(r_{\text{акц},j} - 0,5\sigma_{\text{акц},j}^2)\Delta + \sqrt{\Delta} \xi_{\text{акц},j}(\tau) \sigma_{\text{акц},j}}, \\ \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ v_j(\tau + 1) = v_j(\tau) e^{(r_{v,j} - 0,5\sigma_{v,j}^2)\Delta + \sqrt{\Delta} \xi_{v,j}(\tau) \sigma_{v,j}}, \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ \bar{L}(\tau + 1) = \bar{L}(\tau) e^{(r_L - 0,5\sigma_L^2)\Delta + \sqrt{\Delta} \xi_L(\tau) \sigma_L}, \quad \tau = 1, \dots, T - 1; \quad j = 1, \dots, J; \\ Z_G(\tau + 1) = \sum_{j=1}^J \bar{T}_j(\tau) + \bar{T}_{\text{дом}}(\tau) - \sum_{j=1}^J \bar{G}_j(\tau) - \\ \quad - Q_{\text{вн.обл}}(\tau) \hat{P}_{\text{вн.обл}}(\tau + 1), \quad \text{если } Z_G(\tau) < 0, \quad \tau = 2, \dots, T - 1; \\ Z_G(\tau + 1) = \sum_{j=1}^J \bar{T}_j(\tau) + \bar{T}_{\text{дом}}(\tau) - \sum_{j=1}^J \bar{G}_j(\tau) + \\ \quad + Q_{\text{ин.обл}}(\tau) \hat{P}_{\text{ин.обл}}(\tau + 1), \quad \text{если } Z_G(\tau) > 0, \quad \tau = 2, \dots, T - 1. \end{array} \right. \quad (19)$$

В ограничениях модели (19) учитываются только государственные закупки и расходы на покупку облигаций, а другие расходы государства не учитываются. Поэтому переменная  $M_{\text{гос}}(t)$  опущена.

Решение поставленной задачи состоит в определении оптимальной программы потребления продукции каждого вида, при которой достигается экстремум целевой функции анализируемой задачи. Поскольку в качестве значений объемов потребления в первом периоде выбираются исторические данные, то решение задачи сводится к определению оптимальных значений темпов роста  $\mu_j$  и падения  $\eta_j$  объемов потребления. В каждом отдельном испытании в процессе цикла имитационных расчетов производится генерация значений возмущений в динамике цен товаров, акций и др. Затем производится определение искомых величин  $\mu_j$  и  $\eta_j$  для каждого сектора экономики.

При известных стартовых данных с учетом найденных оптимальных значений темпов изменения объемов потребления, а также на основе принятых рекуррентных соотношений в режиме имитации выполнено построение графиков, отражающих изменение ключевых параметров во времени в рамках отдельного испытания. Полученные графики отражают программу поведения агентов экономической системы. При этом дополнительная задача исследования состояла в анализе соотношения полученных прогнозных значений в режиме имитации и наблюдаемых исторических данных.

Проведение всей имитации предполагает рассмотрение множества испытаний. В каждом испытании генерируется свой набор значений возмущающих факторов, производится поиск оптимальных значений параметров  $\mu_j$  и  $\eta_j$  для каждого сектора экономики. В результате для ключевых величин производится построение набора графиков по числу испытаний, которые сопоставляются с историческими данными.

Решение исходной задачи (15) не может быть получено путем аналитического вывода конечной формулы для оптимальных значений  $\mu_j$  и  $\eta_j$  для каждого сектора экономики в виду сложности рассматриваемых зависимостей между переменными. Применяемый имитационный подход для анализа условий задачи (19) позволяет получать приближенные результаты. Для повышения качества имитационных вычислений следует увеличить число испытаний или уменьшить шаг временной решетки при использовании дискретного приближения, что, в свою очередь, приведет к большим затратам времени на проведение вычислений. Определенные преимущества использования имитационных алгоритмов связаны с относительной простотой учета корреляционных и иных зависимостей между переменными модели. Имитационный алгоритм может быть быстро скорректирован при изменении начальных условий или структурных элементов модели. Изменения в таком случае будут сводиться к модификации рекуррентных соотношений. При проведении расчетов в режиме имитации возможно параллельное проведение анализа рассматриваемой системы в предельных случаях. В целом, в сравнении с аналитическим выводом тех или иных формул, характеризующих зависимость переменных модели, при использовании имитационного моделирования появляется возможность более полного учета всех особенностей, связанных с описываемыми явлениями, процессами и объектами (Ермаков, Жиглявский, 1987, с. 272).

Экспериментальные расчеты с учетом проведения множества испытаний в рамках одного цикла имитационных расчетов проводятся по данным экономики Норвегии. В процессе проведения экспериментов на основе модели (19) были построены траектории роста отдельных макроэкономических показателей экономики Норвегии. Период прогнозирования развития экономики страны

охватывает 10 лет, а стартовый год прогнозирования изменяется в процессе расчетов. Наиболее ранние прогнозы относятся к периоду с 1990 по 1999 г., а более поздние прогнозы охватывают период с 2001 по 2010 г. В процессе расчетов учитывается различный объем исторических данных, используемых для получения стартовых данных для проведения имитационных расчетов. Большинство исторических данных охватывают период начиная с 1970 г., поэтому в силу того, что стартовый год прогнозирования в каждом цикле имитации свой, то и объем исторических данных будет различен. В качестве источников исторических данных используются данные национальной норвежской статистики<sup>1</sup>, а также данные международных статистических органов и организаций, в том числе данные общеевропейских организаций, осуществляющих сбор статистической информации<sup>2</sup>. Кроме того, в процессе расчетов используются данные еще ряда глобальных международных статистических организаций и их подразделений<sup>3</sup>.

На приведенных ниже рисунках изображены два вида графиков. На графиках первого вида представлены исторические данные выбранного показателя за рассматриваемый период времени и пучок траекторий, которые построены на основе оптимальной программы потребления всех видов товаров и услуг. Поскольку при отображении пучка с большим числом графиков происходит наложение одних графиков на другие, то на рисунках отображены пучки не более чем с 200 траекториями.

На втором типе графиков свое отражение находят исторические данные за соответствующий период времени, а также графики, отражающие статистические характеристики для пучка прогнозных траекторий. Остановимся более подробно на принципах построения графиков для отражения изменения статистических показателей во времени. Обозначим через  $s$  номер рассматриваемого испытания в рамках проводимых имитационных расчетов, а через  $S$  — общее число испытаний в одной имитации. При проведении имитационных расчетов в каждом отдельном испытании формируется оптимальный набор значений темпов роста и падения потребления существующих видов товаров, на основе которых производится построение графиков, отражающих изменение выбранных показателей во времени. Обозначим через  $z_s(\tau)$  — значение некоторого показателя на промежутке времени между узлами временной решетки с номерами  $\tau$  и  $\tau + 1$  в испытании с номером  $s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ .

Две последовательности, образованные величинами  $\max_s \{z_s(\tau)\}$ ,  $\tau = 1, \dots, T - 1$  и  $\min_s \{z_s(\tau)\}$ ,  $\tau = 1, \dots, T - 1$  соответственно, отражают максимальные и минимальные значения выбранного параметра на промежутке времени между узлами временной решетки с номерами  $\tau$  и  $\tau + 1$  по результатам всей имитации. Основным графиком, отражающим динамику выбранного показателя,  $z_s(\tau)$ , является график, построенный на основе средних значений,  $\bar{z}(\tau)$ , по всем испытаниям в каждом из промежутков времени:

$$\bar{z}(\tau) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S z_s(\tau), \quad \tau = 1, \dots, T - 1. \quad (20)$$

<sup>1</sup> Nordisk eTax: <http://www.nordisketax.net>; Norway Statistics Bureau: <http://www.ssb.no>

<sup>2</sup> European Commission — Eurostat: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>; United Nations Economic Commission for Europe: <http://w3.unece.org/pxweb/database/STAT/20-ME/2-MENA/2-MENA.asp>

<sup>3</sup> Doing Business Project — Measuring Business Regulations: <http://www.doingbusiness.org>; Index Mundi — Norway: <http://www.indexmundi.com>; International Monetary Fund: <http://www.imf.org>; The World Bank: <http://econ.worldbank.org>; National Accounts Main Aggregates Database: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/selection/basic/Fast.asp>; Organization for Economic Cooperation and Development — Norway: <http://stats.oecd.org>

Наряду с графиками, образованными средними значениями рассматриваемого показателя, рассматриваются два других графика, в которых учитываются не только средние значения для каждого промежутка времени, но и стандартные отклонения соответствующих показателей. Данные графики строятся на основе последовательностей несмещенных оценок стандартного отклонения следующего вида:

$$\bar{z}(\tau) \pm \sqrt{\frac{1}{S-1} \sum_{s=1}^S (\bar{z}(\tau) - z_s(\tau))^2}, \quad \tau = 1, \dots, T-1. \quad (21)$$

При приведении расчетов по данным экономики Норвегии были выделены четыре отрасли. Расчеты показывают, что основное искажение в расчетах может возникать из-за наличия дефицита государственного бюджета и большой доли импорта на внутреннем рынке: согласно специфике модели данные условия должны приводить к оттоку трудовых ресурсов из страны и постепенному увеличению расходов домашних хозяйств.

Результаты экспериментов представлены в виде наборов графиков для одного из циклов имитационных расчетов. При этом графики сгруппированы парно. В каждой паре графиков на первом рисунке в сравнении представлены значения выбранного показателя за указанный промежуток времени согласно историческим данным, а также пучок из траекторий, каждая из которых соответствует отдельному испытанию в рамках одного цикла расчетов в режиме имитации.

Рассмотрим наиболее ранний промежуток времени, на который осуществляется построение расчетного прогноза: с 1990 по 1999 г. включительно. Обозначим через  $\bar{C}(\tau)$ ,  $\bar{Y}(\tau)$ ,  $\bar{Im}(\tau)$ ,  $\bar{Ex}(\tau)$ ,  $\bar{G}(\tau)$  совокупную стоимость потребляемой домашними хозяйствами продукции, совокупный объем производства, стоимость импортируемой продукции, стоимость экспорта и размеры государственных закупок за период времени от  $\tau$  до  $\tau + 1$  соответственно. На рис. 1 представлены значения затрат домашних хозяйств на потребление, включая исторические данные, траектория (a), и пучок из 200 траекторий, построенный на основе первых 200 испытаний в режиме имитации (b).

На рис. 2 представлен ряд траекторий, отражающий изменение статистических показателей, построенных на основе всех испытаний в ходе проведения имитационных расчетов за рассматриваемый период времени. Принципы расчета статистических показателей представлены выше. Для сравнения также да-

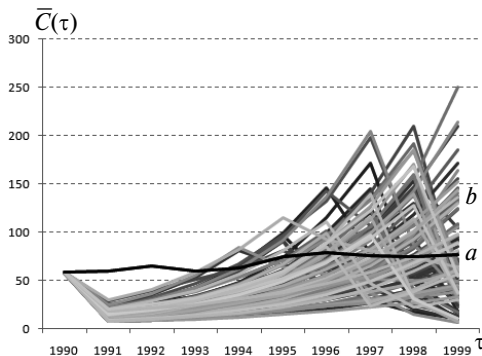


Рис. 1. Расходы домашних хозяйств на потребление по результатам имитации (b) и историческим данным (a) (млрд долл.)

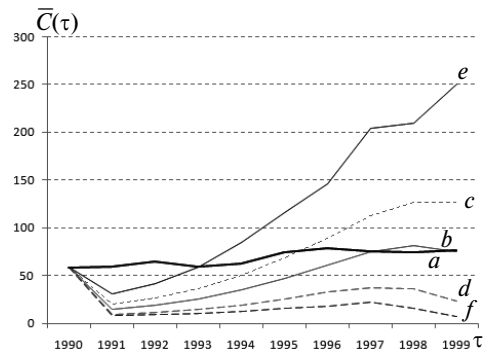


Рис. 2. Расчетные характеристики пучка траекторий расходов домашних хозяйств на потребление по результатам имитации (b – f) и исторические данные (a) (млрд долл.)

на траектория затрат на потребление домашних хозяйств за рассматриваемый промежуток времени по историческим данным (*a*).

На рис. 2, а также на всех последующих аналогичных рисунках траектория (*b*) показывает средние значения выбранного показателя. Траектории (*c*) и (*d*) определяются на основе формулы (21) и показывают коридор шириной в два стандартных отклонения, рассчитанный на основе спрогнозированных данных, при этом траектория (*b*) является серединой коридора. Наконец, траектории (*e*) и (*f*) показывают максимальное и минимальное значения параметра в выбранный момент времени по результатам имитационных расчетов.

Как следует из графиков, приведенных на рис. 1 и 2, разброс в прогнозных значениях расходов домашних хозяйств на потребление во времени возрастет, что свидетельствует об увеличении неопределенности и уменьшении точности прогнозов. Результаты имитационных расчетов показывают, что объемы потребляемых товаров и услуг изменяются во времени, при этом после первоначального резкого падения расходов домашних хозяйств на потребление происходит их постепенный рост. В итоге прогнозные значения затрат то превышают исторические данные, то становятся меньше их значений. Колебания обусловлены принципом построения модели: в качестве неизвестных величин выбирают темпы роста и падения объемов потребления домашних хозяйств.

Анализ результатов имитационных расчетов, а также сопоставление графиков, построенных на основе исторических данных и на основе усредненных

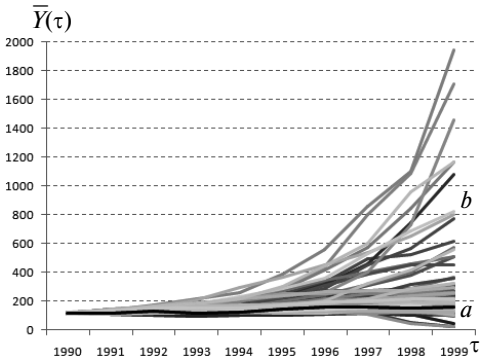


Рис. 3. Совокупная выручка компаний по результатам имитации (*b*) и историческим данным (*a*) (млрд долл.)

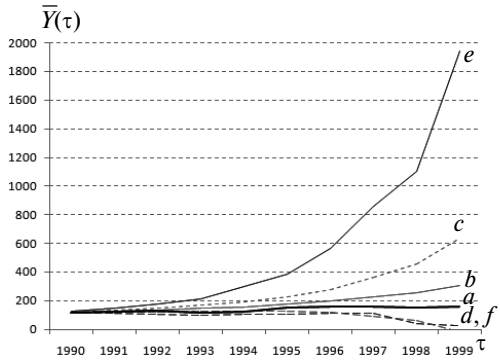


Рис. 4. Расчетные характеристики пучка траекторий совокупной выручки компаний по результатам имитации (*b* – *f*) и исторические данные (*a*) (млрд долл.)

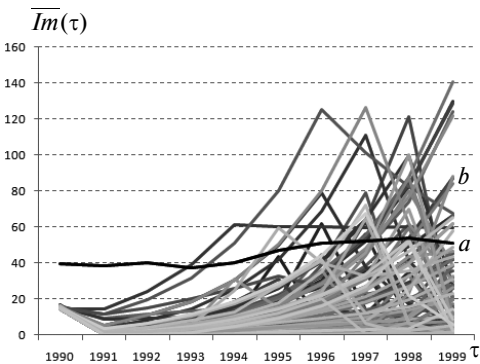


Рис. 5. Импорт по результатам имитации (*b*) и историческим данным (*a*) (млрд долл.)

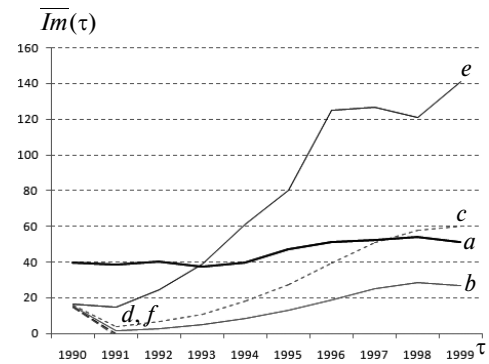


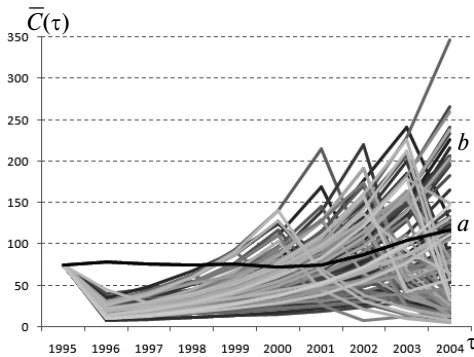
Рис. 6. Расчетные характеристики пучка траекторий импорта согласно историческим данным (*a*) и по результатам имитации (*b* – *f*) (млрд долл.)

прогнозных значений, показывают возможности использования имитационного подхода для прогнозирования и анализа макроэкономических систем. Качество получаемых прогнозов может быть улучшено за счет рассмотрения большего числа товаров и накладывания дополнительных ограничений на значения переменных из системы уравнений (19).

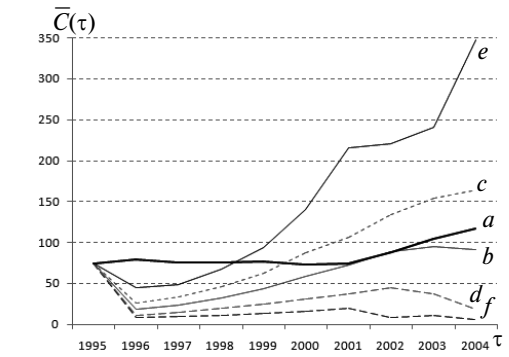
Аналогичные парные графики были построены на основе иных показателей. На рис. 3 и 4 для сравнения показаны исторические значения ВВП Норвегии и траектории, построенные в ходе расчетов. На рис. 4 исторические данные сопоставляются с усредненными и предельными значениями показателей, которые были получены в ходе имитации (см. формулы (20) и (21)).

На рис. 5 и 6 аналогичным образом представлены данные по величине импорта в Норвегию. Следует заметить, что стартовое значение импорта товаров за 1990 г. не совпадает с историческим значением в силу расчета данного значения по остаточному принципу. Но расчеты показывают, что существует тенденция к сближению исторических данных и среднего по испытаниям значения импорта (рис. 6, траектория ( $\bar{b}$ )).

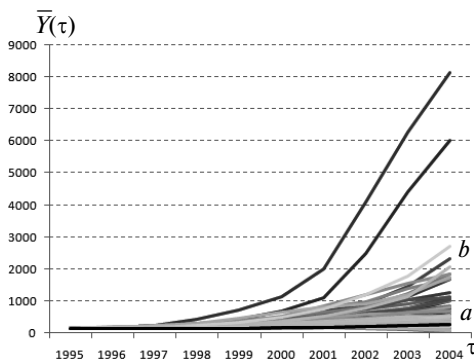
Аналогичные прогнозы были построены и для более длительных временных периодов. В качестве примера на рис. 7–10 представлены результаты построения прогнозов за период с 1995 по 2004 г. При этом объем исходных исторических данных соответственно возрастал.



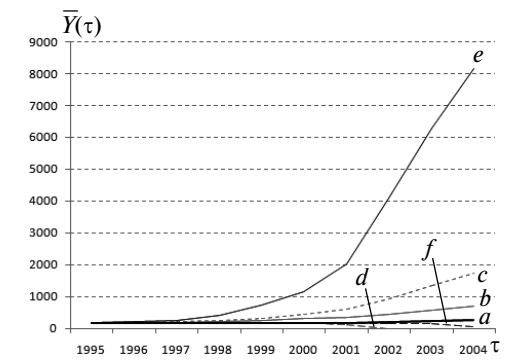
**Рис. 7. Расходы домашних хозяйств на потребление по результатам имитации ( $\bar{b}$ ) и историческим данным ( $\bar{a}$ ) (млрд долл.)**



**Рис. 8. Расчетные характеристики пучка траекторий расходов домашних хозяйств на потребление по результатам имитации ( $\bar{b} - \bar{f}$ ) и историческим данным ( $\bar{a}$ ) (млрд долл.)**



**Рис. 9. Совокупная выручка компаний по результатам имитации ( $\bar{b}$ ) и историческим данным ( $\bar{a}$ ) (млрд долл.)**



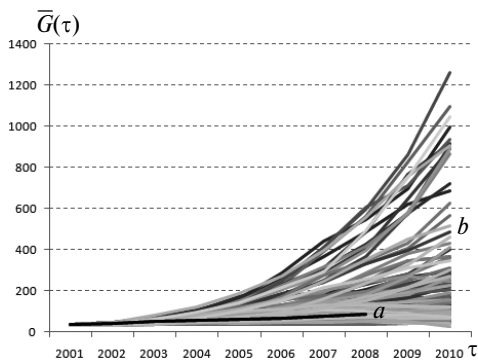
**Рис. 10. Расчетные характеристики пучка траекторий совокупной выручки компаний по результатам имитации ( $\bar{b} - \bar{f}$ ) и историческим данным ( $\bar{a}$ ) (млрд долл.)**

В рассматриваемой экономической модели первоначальное сокращение потребления обусловлено в первую очередь необходимостью фирм накопить капитал или необходимостью перераспределить трудовые ресурсы. В начале рассматриваемого периода домашние хозяйства сокращают свое потребление товаров и услуг и осуществляют покупку акций фирм. Существенная особенность рассматриваемой модели экономического роста состоит в том, что домашние хозяйства всегда покупают все акции компаний, которые эмитируются в стране. Тогда, с одной стороны, сокращая или откладывая текущее потребление, домашние хозяйства осуществляют инвестиции в выпускаемые новые ценные бумаги, которые, в свою очередь, необходимы для обеспечения быстрого накопления капитала компаний и увеличения выпуска продукции. С другой стороны, обеспечиваемое при этом возрастание объемов выпуска отечественных компаний приводит к росту доходов домашних хозяйств за счет увеличения заработной платы, а также за счет сдерживания импорта, что в целом приводит к увеличению потребления в будущем.

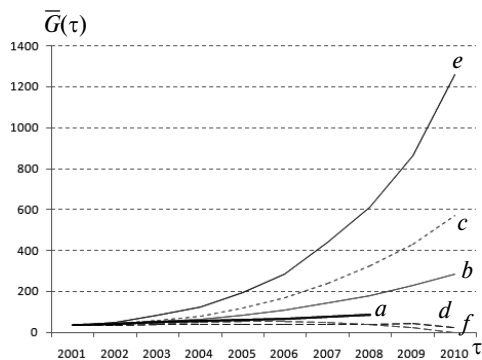
Как показывают расчеты, выбор такой политики оказывается более предпочтительным по критерию максимизации совокупной дисконтированной полезности потребления. В действительности акции компаний приобретаются в первую очередь другими компаниями — участниками биржи или государством, а не домашними хозяйствами, поэтому на практике такого резкого падения в начале временного интервала, на который осуществляется построение прогноза, не будет.

Последующее изменение тенденции в динамике расходов домашних хозяйств на потребление в сторону сокращения (см. изломы графиков прогнозируемого потребления в 2001—2003 гг. на рис. 7) обусловлено наступлением ситуации, когда расходы населения значительно превышают поступления средств. Возникновение таких предельных ситуаций обусловлено спецификой системы уравнений (19), в частности выбором вида целевой функции и конечной целью проведения оптимизационных расчетов в отдельном испытании. Применяемая система ограничений в механизме имитации позволяет не допустить значительного роста потребления домашними хозяйствами: увеличивающееся потребление приводит к возрастанию доли импортных товаров, росту цен и, как следствие, недостатку средств у домашних хозяйств.

Построение траекторий роста для других макроэкономических показателей из модели (19) для примера показано на основе сценариев, в которых прогнозный период начинается позже. Ниже приведены графики изменения государственных закупок (см. рис. 11—12), а также графики для совокупной стоимости

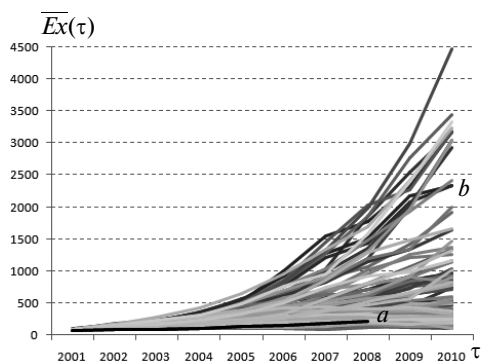


**Рис. 11. Государственные закупки по результатам имитации (b) и историческим данным (a) (млрд долл.)**

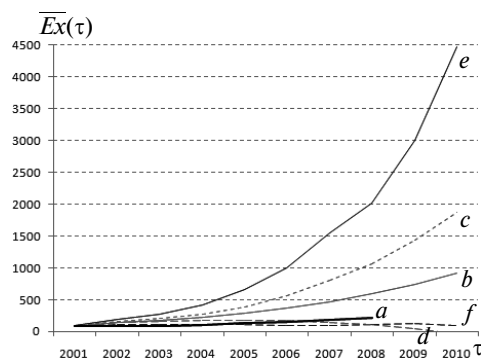


**Рис. 12. Расчетные характеристики пучка траекторий государственных закупок по результатам имитации (b-f) и историческим данным (a) (млрд. долл.)**





**Рис. 13.** Экспорт Норвегии по результатам имитации (*b*) и историческим данным (*a*) (млрд долл.)



**Рис. 14.** Расчетные характеристики пучка траекторий экспорта Норвегии по результатам имитации (*b – f*) и историческим данным (*a*) (млрд долл.)

экспортируемых товаров (см. рис. 13—14). Все графики сгруппированы попарно, а все условные обозначения траекторий сохраняются. Графики на рис. 11—12 показывают постоянный рост государственных закупок в течение рассматриваемого периода времени.

Исторические данные попадают в диапазон, определяемый стандартными отклонениями от среднего по испытаниям значения выбранного показателя. Как было отмечено ранее, домашние хозяйства покупают ценные бумаги компаний (см. рис. 12), что приводит к более быстрому накоплению капитала фирм и росту объемов производства. Возрастают прогнозируемые объемы государственных закупок и экспорта, которые превышают исторические значения показателя за данный период (рис. 13—14). Если учесть, что экономико-математическая модель описывает малую экономику, то на мировом рынке всегда найдется достаточное число покупателей, чтобы раскупить всю продукцию, идущую на экспорт.

Отдельно следует отметить специфические особенности предложенной модели, которые характерны для всех моделей экономического роста стран с малой открытой экономикой. Основная особенность анализа таких стран связана с наличием большого количества внешних факторов, воздействие которых можно оценить лишь приблизительно. При этом процессы, протекающие в стране с малой экономикой, неспособны повлиять на существующие мировые процессы или тренды на различных рынках: возможен лишь анализ реакции экономики страны на происходящие внешние воздействия. Поэтому данную систему нельзя использовать для прогнозирования общемировых тенденций, однако она может быть применена для анализа ситуации в рамках отдельной страны при известных тенденциях изменений на мировых рынках.

Предлагаемая модель может быть использована для определения реакции экономической системы отдельной страны на действия, предпринимаемые правительством данной страны в экономической области, или в более широком смысле на так называемые внутренние возмущающие факторы. К примеру, модель позволяет определить, как будет развиваться конъюнктура на различных локальных рынках внутри страны при изменении, например, налоговой политики государства при условии, что все агенты: население, фирмы-производители, поступают рациональным образом. Вместе с тем получаемые в результате имитаций конкретные траектории макроэкономических показателей существенно зависят от выбранного расчетного периода.

Все полученные в результате имитационных расчетов графики в той или иной степени отражают условия постоянного роста рассматриваемых макро-

экономических показателей, что соответствует общей парадигме моделей экономического роста, которая была определена еще постановкой модели Солоу—Свена (Solow, 1956; Swan, 1956). Представленные результаты позволяют сделать вывод о необходимости модификации исходной парадигмы моделей роста в условиях современной экономики. Следует принимать во внимание возможность падения макроэкономических показателей в определенные кризисные периоды времени. Это послужит авторам предметом дальнейшего исследования.

В целом современное развитие макроэкономического моделирования, связанное с учетом неопределенности и риска, опирается на непрерывный учет фактора времени и предполагает постановку моделей, как в форме отдельной оптимизационной задачи на бесконечном периоде, так и в виде различных вариантов агентского моделирования, включающих те или иные разновидности случайных процессов, как форму учета влияния факторов неопределенности и риска. Анализ моделей подобного типа представляет значительные трудности и обусловлен введением формальных предпосылок, которые либо не проверяемы, либо заведомо не соответствуют реальным экономическим условиям. Определенные возможности использования выводов из рассматриваемых моделей экономического роста для анализа условий реального развития экономики той или иной страны могут быть связаны с применением дискретной аппроксимации стохастических уравнений в форме рекуррентных соотношений и их использованием в режиме имитации. Получаемые при этом результаты имеют достаточно противоречивый характер и скорее побуждают к дальнейшим исследованиям, чем имеют в настоящее время законченный вид.

### Источники

- Абель Э., Бернанке Б. Макроэкономика / пер. с англ. 5-е изд. СПб., 2011.
- Воронцовский А. В. Современные подходы к моделированию экономического роста // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 5. Экономика. 2010. Вып. 3. С. 105—119.
- Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю., Ахобадзе Т. Д., Дмитриев А. Л., Шеров-Игнатьев В. Г. Моделирование экономического роста в условиях современной экономики / отв. ред. А. В. Воронцовский. СПб., 2011.
- Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента: учеб. пособие. М., 1987.
- Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб., 2007.
- Asea P. K., Turnovsky S. J. Capital income taxation and risk-taking in a small open economy // Journal of Public Economics. 1998. Vol. 68. P. 55—90.
- Benavie A., Grinols E., Turnovsky S. J. Adjustment costs and investment in a stochastic endogenous growth model // Journal of Monetary Economics. 1996. Vol. 38. P. 77—100.
- Chatterjee S., Turnovsky S. J. Foreign aid and economic growth: The role of flexible labor supply // Journal of Development Economics. 2007. Vol. 84. P. 507—533.
- Dixit A., Pindyck P. Investment under uncertainty. Princeton (N. J.). Princeton University Press, 1994.
- Getachew Y. Y. Public capital and distribution dynamics in a two-sector growth model // Journal of Macroeconomics. 2010. Vol. 32. N 2. P. 606—616.
- Grinols E., Turnovsky S. J. Optimal government finance policy and exchange rate management in a stochastically growing open economy // Journal of International Money and Finance. 1996. Vol. 15. N 5. P. 687—716.
- Mondal D., Gupta M. R. Endogenous imitation and endogenous growth in a North-South model: A theoretical analysis // Journal of Macroeconomics. 2009. Vol. 31. P. 668—684.
- Prommeret A., Smith W. T. Fertility, volatility, and growth // Economics Letters. 2005. Vol. 87. P. 347—353.
- Rao B. B. Estimates of the steady state growth rates for selected Asian countries with an extended Solow model // Economic Modelling. 2010. Vol. 27. P. 46—53.
- Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. N 1. P. 65—94.
- Stulz R. M. Interest rates and monetary policy uncertainty // Journal of Monetary Economics. 1986. Vol. 17. P. 331—347.

*Swan T. W.* Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. 1956. Vol. 32. Nov. P. 334—361.

*Turnovsky S. J.* Methods of Macroeconomic Dynamics. Cambridge (M. A), 1996.

*Turnovsky S. J.* On the role of government in a stochastically growing open economy // Journal of Economic Dynamics and Control. 1999. Vol. 23. P. 873—908.

*Turnovsky S. J., Chattopadhyay P.* Volatility and growth in developing economies: some numerical results and empirical evidence // Journal of International Economics. 2003. Vol. 59. P. 267—295.

*Turnovsky S. J., Grinols E.* Optimal government finance policy and exchange rate management in a stochastically growing open economy // Journal of International Money and Finance. 1996. Vol. 15. N 5. P. 687—716.

*Turnovsky S. J., Papazoglou C.* External markets, exchange rate dynamics and the impact of monetary disturbances // Journal of International Money and Finance. 1994. Vol. 13. N 5. P. 499—515.