ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Е. В. Полякова[1]

канд. физ.-мат. наук, докт. техн. наук, профессор факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО БОГАТСТВА В МОДЕЛИ РОСТА С ЭНДОГЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

1. Введение

В последние десятилетия исследованиям, посвященным макроэкономическим моделям с неоднородными экономическими агентами, уделяется большое внимание в работах отечественных и зарубежных авторов (Борисов, 2002; 2009; Борисов, Сурков, 2009; Borissov, 2001, 2002; Foley, Michl, 2000; Mankiw, 2000). Отказ от предположения о существовании репрезентативного потребителя позволяет иначе взглянуть на некоторые макроэкономические проблемы, в частности на проблему распределения национального богатства.

В предлагаемой работе рассматривается модель с неоднородными экономическими агентами, для которой имеет место сраффианская неопределенность (Sraffian indeterminacy) (Sraffa, 1960; Mandler, 1999). Исследование проводится в рамках модели перекрывающихся поколений с наследством, первоначальный вариант которой был построен Барро для анализа риккардианской эквивалентности (Barro, 1974). Эта модель является естественным обобщением модели Дайамонда (Diamond, 1965).

Существенной чертой предлагаемой в работе модели является предположение о том, что коэффициент дисконтирования потребителя определяется эндогенно и зависит от текущего уровня его благосостояния: чем богаче потребитель, тем больше его коэффициент дисконтирования и тем большая роль в совокупной функции полезности придается той полезности, которую извлекут из своего потребления его потомки. Принятое допущение соответствует представлению о богатых как о наиболее «терпеливых» индивидах (Blanchard, Fischer, 1989).

Самостоятельный теоретический интерес представляет вопрос о существовании равновесия в данной модели и его определенности. Как будет показано, при некоторых достаточно общих предположениях равновесное состояние существует и характеризуется сраффианской неопределенностью.

В предлагаемой работе поставлена задача определения характера влияния размера государственного долга на распределение национального богатства. Указанная проблематика диктуется появлением многочисленных работ в макроэкономической литературе, в которых начиная со статьи Барро (Barro, 1974) рассматривается проблема воздействия размера государственного долга на межвременное поведение потребителей. Имеется в виду так называемая риккарди-

[1] Эл. адрес: katyapol@eu.spb.ru

анская эквивалентность, т. е. теоретическое положение об отсутствии влияния размера государственного долга на национальные сбережения и инвестиции. В частности, представляет интерес изучение влияния различных систем социального страхования на распределение национального богатства.

В работе проводится сравнительный анализ различных стационарных состояний. Вопросы, связанные с переходом из одного стационарного состояния в другое, на данном этапе исследования модели не рассматриваются, что следует иметь в виду при интерпретации полученных результатов.

2. Описание модели

Производственный сектор. Предположим, что производственный сектор экономики характеризуется производственной функцией $Y = F(K, L)$, где Y — национальный продукт, произведенный в течение некоторого единичного промежутка времени, $K \geqslant 0$ — задействованный на этом промежутке совокупный производственный капитал, коэффициент износа которого равен нулю, $L \geqslant 0$ — совокупное предложение труда.

Производственная функция непрерывно дифференцируема, вогнута и положительно однородна первой степени, т. е. $F(\eta K, \eta L) = \eta F(K, L)$ $(\eta > 0)$; кроме того, при любых K и L выполняются равенства $F(K, 0) = F(0, L) = 0$. Будут использованы следующие стандартные обозначения:

$$k = K/L, \quad y = Y/L, \quad f(k) = F(k, 1) = F(K, L)/L,$$

для которых справедливы очевидные соотношения:

$$y = f(k), \; Y = Lf(k).$$

Если предполагать, что все рынки конкурентные, производители максимизируют прибыль, а заработная плата за использованную рабочую силу выплачивается в конце того периода, в котором эта рабочая сила используется, то для равновесного дохода на капитал r и равновесной реальной заработной платы w выполняются равенства:

$$r = f'(k) \quad \text{и} \quad w = f(k) - f'(k)k. \tag{1}$$

В дальнейшем будет принято допущение о том, что $f'(0) > n$.

Поведение потребителей. Каждый индивид, родившийся в момент времени t, живет в течение двух периодов: $[t, t+1]$ и $[t+1, t+2]$. Будем считать, что индивиды работают только в молодости (в первый период жизни), а в старости (во второй период жизни) тратят свои сбережения и оставляют наследство следующему поколению. Предпочтения индивидов характеризуются функцией полезности $U(c_0,c_1)$, где $c_0 \geqslant 0$ и $c_1 \geqslant 0$ — потребление в молодости и старости соответственно. Потребление и в первом, и во втором периодах времени является нормальным благом. Функция полезности предполагается непрерывно дифференцируемой и вогнутой, кроме того, при любых $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ выполняются следующие соотношения:

$$U_0'(c_0, c_1) > 0, \; U_1'(c_0, c_1) > 0, \; U_0'(0, c_1) = U_1'(c_0, 0) = \infty,$$
$$U_0'(c, c_1) \to 0, \; U_1'(c_0, c) \to 0 \text{ при } c \to \infty,$$

где $U_0'(c_0, c_1) = \dfrac{\partial U}{\partial c_0}(c_0, c_1)$, $U_1'(c_0, c_1) = \dfrac{\partial U}{\partial c_1}(c_0, c_1)$.

Предположим, что изменение численности населения происходит с постоянным темпом прироста $n > 0$, задаваемым экзогенно. Индивиды характеризуются одной и той же функцией полезности, но могут иметь различные коэффициенты дисконтирования, с помощью которых значения собственной функции полезности соизмеряются с будущими значениями функции полезности наследников. Предполагается, что коэффициент дисконтирования потребителя определяется эндогенно и зависит от текущего уровня его благосостояния: чем богаче потребитель, тем больше его коэффициент дисконтирования и тем большая роль в совокупной функции полезности придается той полезности, которую извлекут из своего потребления его потомки.

В каждый период времени потребители выплачивают государству некоторую фиксированную сумму τ, не зависящую от размера их доходов. Если индивид, родившийся в момент времени $t = 0, 1, \ldots$ в периоде $[t, t + 1]$ получает заработную плату по ставке $w(t)$ и потребляет $c_0(t)$, то его сбережения будут равны величине:

$$s(t) = z(t) + w(t) - c_0(t) - \tau, \tag{2}$$

где $z(t) \geqslant 0$ — наследство, полученное от представителя предыдущего поколения. Обозначим процентную ставку, действующую в периоде $[t + 1, t + 2]$, через $r(t + 1)$, тогда потребление $c_1(t + 1)$ индивида в этом периоде в совокупности с оставляемым наследством $(1 + n)z(t + 1)$ определяется выражением:

$$c_1(t + 1) + (1 + n)z(t + 1) = (1 + r(t + 1))s(t) - \tau. \tag{3}$$

Здесь $z(t + 1) \geqslant 0$ — наследство, которое получит один представитель молодого поколения, родившийся в момент $t + 1$.

Обозначим коэффициент дисконтирования, который действует в момент времени $\tilde{t}$, через $\lambda_{\tilde{t}}$. Задача потребителя состоит в максимизации совокупной полезности:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t U(c_0(t), c_1(t + 1)), \tag{4}$$

при бюджетном ограничении:

$$\begin{aligned} &(1 + r(t + 1))c_0(t) + c_1(t + 1) = \\ &= (1 + r(t + 1))(z(t) + w(t) - \tau) - (1 + n)z(t + 1) - \tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_t = \prod_{\tilde{t}=0}^{t-1} \lambda_{\tilde{t}}$ $(t = 1, 2, \ldots)$, а величина $z(0) \geqslant 0$ считается экзогенно заданной. Как было отмечено выше, $\lambda_{\tilde{t}}$ зависит от благосостояния индивида $\omega(\tilde{t}) = w(\tilde{t}) + z(\tilde{t}) - \tau - \dfrac{\tau}{1 + r(\tilde{t} + 1)} = w(\tilde{t}) + z(\tilde{t}) - \dfrac{2 + r(\tilde{t} + 1)}{1 + r(\tilde{t} + 1)}\tau$, под которым понимается текущая стоимость всех поступлений с учетом налоговых выплат: $\lambda_{\tilde{t}} = \lambda(\omega(\tilde{t}))$, где $\lambda(\omega)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция, принимающая значения в интервале $(0, 1)$.

Предположение о зависимости коэффициента дисконтирования от уровня благосостояния не означает однако, что при решении задачи максимизации (4)—(5) индивид учитывает эту зависимость. Числа β_t рассматриваются им как экзогенно заданные, а полученное решение задачи $(c_0(t), c_1(t + 1), z(t + 1))$ $(t = 0, 1, \ldots)$ будет так называемым согласованным решением, если $\beta_0 = 1$, $\beta_t = \prod_{\tilde{t}=0}^{t-1} \lambda_{\tilde{t}}$ $(t = 1, 2, \ldots)$, где $\lambda_{\tilde{t}} = \lambda(\omega(\tilde{t}))$. Заметим, что если ограничиться изучением только стационарных решений, то определение согласованного решения задачи не вызывает затруднений.

Функции государства. Введем в рассмотрение государство, которое проводит фискальную политику и определяет размер текущего государственного долга.

Обозначим объем государственных расходов, объем налоговых поступлений, государственный долг соответственно через $G(t)$, $T(t)$ и $D(t)$. Если доходность государственных облигаций совпадает с доходностью инвестиций в производственный капитал, т. е. со ставкой процента r, то бюджетное ограничение государства примет вид:

$$G(t) = T(t) + D(t) - (1 + r(t))D(t-1). \tag{6}$$

Так как в дальнейшем будут рассматриваться стационарные состояния равновесия, предположим, что объем государственных расходов $G(t)$, объем налоговых поступлений $T(t)$ и государственный долг $D(t)$ растут тем же темпом, что и население. В этом случае при $r(t) = r$ справедливы равенства:

$$G(t) = gL(t), \quad T(t) = \tau L(t), \quad D(t) = dL(t),$$

где g, τ, d — некоторые не зависящие от времени постоянные.

Разделив равенство (6) на $L(t)$, после элементарных преобразований получим

$$\tau = g + \frac{r-n}{1+n}d. \tag{7}$$

Таким образом, фиксированная сумма τ, которую в каждый период времени потребители выплачивают государству независимо от размера их доходов и принадлежности к классам богатых и бедных, определяется равенством (7). Естественно предположить, что величина налоговых выплат такова, что правые части бюджетных ограничений индивидов положительны.

3. Определение стационарного равновесия

В работах К. Ю. Борисова, посвященных исследованию неопределенных состояний равновесия, отмечается, что существование стационарных решений задачи потребителя зависит от соотношения между коэффициентом дисконтирования и величиной $\frac{1+n}{1+r}$ (Борисов, 2002; Borissov, 2001, 2002). Применим методику, предложенную в этих работах, к исследованию стационарных решений задачи (4)—(5).

Необходимыми условиями максимума совокупной полезности $\sum_{t=0}^{\infty}\beta_t U(c_0(t),$ $c_1(t+1))$ при бюджетном ограничении (5), требовании положительности потребления индивида в оба периода жизни и невозможности оставлять в наследство долги ($z(t) \geqslant 0$, $t = 0, 1, \ldots$), являются соотношения:

$$(1 + r(t+1))U_1'(c_0(t), c_1(t+1)) = U_0'(c_0(t), c_1(t+1)), \tag{8}$$

$$U_1'(c_0(t), c_1(t+1)) \geqslant \frac{\beta_{t+1}}{\beta_t}U_0'(c_0(t+1), c_1(t+2))/(1+n), \tag{9}$$

$$z(t+1)\left[U_1'(c_0(t), c_1(t+1)) - \frac{\beta_{t+1}}{\beta_t}U_0'(c_0(t+1), c_1(t+2))/(1+n)\right] = 0. \tag{10}$$

Соотношения (9)—(10) характеризуют значение $z(t+1)$: если (9) выполняется как строгое неравенство, то $z(t+1) = 0$.

Изучим стационарные состояния равновесия. Рассмотрим задачу (4)—(5) в предположении, что

$$0 < r(t) = r = \text{const},\ 0 < w(t) = w = \text{const}\ (t = 0, 1, \ldots). \tag{11}$$

Назовем решение $(c_0(t), c_1(t+1), z(t+1))$ $(t = 0, 1, \ldots)$ задачи (4)—(5) при условии (11) стационарным, если

$$0 < c_0(t) = c_0^* = \text{const},\ 0 < c_1(t+1) = c_1^* = \text{const},\ 0 \geqslant z(t) = z^* = \text{const}\ (t = 0, 1, \ldots).$$

Заметим, что в этом случае должно быть выполнено равенство $z^* = z(0)$, где $z(0)$ предполагается заданной величиной.

Очевидно, что коэффициент дисконтирования $\lambda_{\tilde{t}}$ определяется выражением: $\lambda_{\tilde{t}} = \lambda\left[w + z^* - \dfrac{2+r}{1+r}\tau\right] = \lambda$, $\beta_t = \lambda^t$ и отношение $\dfrac{\beta_{t+1}}{\beta_t} = \lambda$, $t = 0, 1, \ldots$

Необходимые условия максимума (8)—(10) для стационарного решения переписываются в следующем виде:

$$(1+r)U_1'(c_0^*, c_1^*) = U_0'(c_0^*, c_1^*), \tag{12}$$

$$(1+r)U_1'(c_0^*, c_1^*) \geqslant \lambda U_0'(c_0^*, c_1^*)/(1+n), \tag{13}$$

$$z^*[U_1'(c_0^*, c_1^*) - \lambda U_0'(c_0^*, c_1^*)/(1+n)] = 0. \tag{14}$$

Отметим, что условия (12)—(14), дополненные равенством

$$(1+r)c_0^* + c_1^* = (1+r)w + (r-n)z^* - (2+r)\tau,$$

являются также и достаточными для того, чтобы набор (c_0^*, c_1^*, z^*) определял стационарное решение задачи (4)—(5) при выполнении соотношений (11).

Очевидно, что существование стационарного решения зависит от соотношения между λ и $(1+n)/(1+r)$: если $\lambda > (1+n)/(1+r)$, то стационарного решения не существует (в этом случае соотношения (12)—(13) приводят к противоречию). Если $\lambda < (1+n)/(1+r)$, стационарное решение (c_0^*, c_1^*, z^*) существует только при $z^* = 0$ и, следовательно, выполняется равенство $z(0) = 0$. Наконец, если $\lambda = (1+n)/(1+r)$, то при любом $z(0) \geqslant 0$ стационарное решение (c_0^*, c_1^*, z^*) существует. При этом $z^* = z(0)$, а (c_0^*, c_1^*) представляет собой решение задачи:

$$\max U(c_0, c_1), \tag{15}$$

$$(1+r)c_0^* + c_1^* = (1+r)w + (r-n)z^* - (2+r)\tau. \tag{16}$$

В частности, (c_0^*, c_1^*) удовлетворяет равенству (12).

Введем в рассмотрение монотонно убывающую функцию $\rho(\omega)$, определенную равенством $\lambda(\omega) = \dfrac{1+n}{1+\rho(\omega)}$, т. е. $\rho(\omega) = \dfrac{1+n}{\lambda(\omega)} - 1$. В терминах функции $\rho(\omega)$ вопрос существования стационарных согласованных решений задачи (4)—(5) при условии (11) решается следующим образом. Если $\rho(w - \dfrac{2+r}{1+r}\tau) < r$, то стационарных согласованных решений не существует, если же $\rho(w - \dfrac{2+r}{1+r}\tau) = r$, то согласованное стационарное решение существует только при $z(0) = 0$. В том случае, когда $\rho(w - \dfrac{2+r}{1+r}\tau) > r$, при $z(0) = 0$ согласованное стационарное решение также существует, кроме того, может оказаться, что оно существует и при некотором положительном значении $z(0)$. Указанная возможность реализуется в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{\omega\to\infty} \rho(\omega) < r$, при этом в качестве $z(0)$ следует взять решение уравнения $\rho(w + z - \dfrac{2+r}{1+r}\tau) = r$ относительно z.

Предположим, что r и w — равновесные значения ставки процента и реальной заработной платы, а налоговые выплаты τ при экзогенно заданных параметрах g и d определяются в соответствии с выражением (7). Предыдущий анализ показывает, что если на поведение функции $\rho(\omega)$ наложить некоторые дополнительные ограничения, то при фиксированных r, w и τ найдется одно или два значения $z(0)$, при которых существует согласованное стационарное решение задачи (4)—(5). Заметим, что одно из этих значений обязательно нулевое: $z(0) = 0$. Этот факт, в свою очередь, означает, что в состоянии равновесия могут существовать только две группы потребителей. Потребители одной из этих групп, «бедные», в состоянии равновесия оставляют потомкам нулевое наследство, а потребители другой, «богатые», — положительное наследство, одинаковое для всех членов этой группы. Возможны также крайние случаи, когда в равновесии останется только одна из этих групп. Заметим, что в равновесном состоянии коэффициент дисконтирования «бедных» меньше, чем у «богатых», в связи с чем экономические характеристики жизнедеятельности «богатых» индивидов (потребление, размер наследства) будем обозначать с помощью индекса h (*high*), а «бедных» — с помощью индекса l (*low*). Пусть параметр σ определяет долю «богатых» в населении, тогда доля «бедных» равна $1 - \sigma$. В рамках предлагаемой модели эти величины формируются эндогенно.

Определим стационарное равновесие как набор (k^*, r^*, w^*, t^*, s^*, (c^*_{h0}, c^*_{h1}, z^*_h), (c^*_{l0}, c^*_{k1}, z^*_l)), состоящий из неотрицательных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $r^* = f'(k^*)$;

2) $w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$;

3) $\tau^* = g + \dfrac{r^* - n}{1 + n} d$;

4) для $i = h, l$ вектор (c^*_{i0}, c^*_{i1}, z^*_i) является стационарным согласованным решением задачи (4)—(5) при $z(0)=z^*_i$, $r(t) = r^*$, $w(t) = w^*$ ($t = 0, 1, \dots$), $\tau = \tau^*$, $0 = z^*_l \leqslant z^*_h$;

5) $0 \leqslant \sigma^* \leqslant 1$;

6) $\sigma^* s^*_h + (1 - \sigma)s^*_l = (1 + n)(k^* + d)$, где $s^*_i = z^*_i + w^* - c^*_{i0} - \tau^*$ ($i = h, l$).

Последнее условие в данном определении стационарного равновесия означает, что производственный капитал $K(t + 1)$ и государственный долг $D(t + 1)$ в периоде $[t + 1, t + 2]$ в совокупности равны суммарным сбережениям, сделанным всеми потребителями, «богатыми» и «бедными», родившимися в момент времени t ($t = 0, 1, \dots$), т. е.

$$K(t + 1) + D(t + 1) = \sigma L(t)s^*_h + (1 - \sigma) L(t)s^*_l.$$

Разделив последнее равенство на $L(t)$, получим требуемое условие.

4. Существование и неопределенность стационарного равновесия

Покажем, что при некоторых достаточно общих предположениях стационарное равновесие существует и обладает сраффианской неопределенностью. Допустим, что $\lim\limits_{\omega \to \infty} \rho(\omega) = n$ и обозначим через k^G решение задачи максимизации $f(k) - nk$, которое находится как решение уравнения $f'(k) = n$.

Возьмем произвольные $\overline{k}$, $\overline{r}$ и $\overline{w}$, такие, что $0 < \overline{k} < k^G$, $\overline{r} = f'(\overline{k})$ и $\overline{w} = f(\overline{k}) - f'(\overline{k})\overline{k}$. Будем предполагать, что экзогенно заданные параметры g и d удовлетворяют условию

$$g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d < \frac{1 + \overline{r}}{2 + \overline{r}} \overline{w},$$

и покажем, что в некоторых случаях существует стационарное равновесие (k^*, r^*, w^*, t^*, s^*, $(c^*_{h0}, c^*_{h1}, z^*_h)$, $(c^*_{l0}, c^*_{k1}, z^*_l)$), для которого выполняются равенства:

$$k^* = \overline{k},\ r^* = \overline{r},\ w^* = \overline{w},\ \tau^* = g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d. \tag{17}$$

Если же указанное равновесие не существует, то найдется равновесие, удовлетворяющее соотношениям:

$$\overline{k} < k^* < k^G,\ r^* = f'(k^*) < \overline{r},\ w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^* > \overline{w},\ \tau^* = g + \frac{r^* - n}{1 + n} d. \tag{18}$$

Рассматривая сбережения индивидов как функцию $s(k, z)$, будем полагать, что:

$$s(k, 0) \leqslant (1 + n)(k + d) \Rightarrow k < k^G. \tag{19}$$

Предположим сначала, что неравенство $s(k, 0) \leqslant (1 + n)(k + d)$ может выполняться только при $k < \overline{k}$ и $\rho\left[\overline{w} - \frac{2 + \overline{r}}{1 + \overline{r}}(g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d)\right] \geqslant \overline{r}$. Определим $\overline{z}$ как решение уравнения

$$\rho\left[\overline{w} + z - \frac{2 + \overline{r}}{1 + \overline{r}}(g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d)\right] = \overline{r}.$$

Если $s(\overline{k}, \overline{z}) \geqslant (1 + n)(\overline{k} + d)$, то требуемое равновесие задается следующим образом: $k^* = \overline{k}$; $r^* = \overline{r}$; $w^* = \overline{w}$; $\tau^* = g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d$; s^* является решением уравнения:

$$(1 - \sigma)s(\overline{k}, 0) + \sigma s(\overline{k}, \overline{z}) = (1 + n)(\overline{k} + d)$$

относительно σ; $z^*_l = 0$; $z^*_h = \overline{z}$; (c^*_{h0}, c^*_{h1}) является решением задачи (4)—(5) при $z = z^*_h$, $r = r^*$, $w = w^*$; (c^*_{l0}, c^*_{l1}) представляет собой решение задачи (4)—(5) при $z = 0$, $r = r^*$, $w = w^*$.

Если $s(\overline{k}, \overline{z}) < (1 + n)(\overline{k} + d)$, то существует равновесие, удовлетворяющее (18). Определим его следующим образом: $\sigma^* = 1$; k^* является решением уравнения:

$$s(k, z(k)) = (1 + n)k \tag{20}$$

относительно k; $r^* = f'(k^*)$; $w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$; $z^*_l = 0$; $z^*_h = \overline{z}$; (c^*_{h0}, c^*_{h1}) является решением задачи (4)—(5) при $z = z^*_h$, $r = r^*$, $w = w^*$; (c^*_{l0}, c^*_{l1}) представляет собой решение задачи (4)—(5) при $z = 0$, $r = r^*$, $w = w^*$.

Легко заметить, что уравнение (20) имеет решение на интервале $(\overline{k}, k^G)$. Действительно, с учетом (5) из определения функции $s(k, z)$ вытекает неравенство $s(k, z(k)) > \frac{1 + n}{1 + r} z(k)$, кроме того, при $k \to k^G - 0$ $r \to n + 0$ и $z(k) \to \infty$. Следовательно, решение уравнения (20) существует.

Предположим далее, что $\rho\left[\overline{w} + z - \frac{2 + \overline{r}}{1 + \overline{r}}(g + \frac{\overline{r} - n}{1 + n} d)\right] < \overline{r}$ или что неравенство $s(k, 0) < (1 + n)(k + d)$ выполняется при некотором $k > \overline{k}$. В этом случае не существует равновесия, определяемого соотношениями (17). Однако найдется равновесие, удовлетворяющее неравенствам (18), так как в силу (19) можно найти $\tilde{k}$, для которого $\rho\left[\tilde{w} + z - \dfrac{2+\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\left(g + \dfrac{\tilde{r}-n}{1+n}d\right)\right] \geqslant \tilde{r}$ при $\tilde{r} = f'(\tilde{k})$ и $\tilde{w} = f(\tilde{k}) - f'(\tilde{k})\tilde{k}$, и неравенство $s(k, 0) < (1+n)(k+d)$ выполняется только при $k < \tilde{k}$. Для $\tilde{k}$ справедливы рассуждения, которые проводились выше для $\overline{k}$.

Таким образом, доказано существование и неопределенность стационарного равновесия в рамках изучаемой модели. Заметим, что для получения однозначного равновесного состояния следует задать любой из параметров, определяющих равновесие. Основатели классической школы рассматривали ставку реальной заработной платы в терминах «subsistence wage» — заработной платы, обеспечивающей поддержание жизнедеятельности работников на некотором минимальном уровне, который в значительной степени определяется историческими, социальными и институциональными особенностями, а также существующими в обществе представлениями о справедливости. Подобная точка зрения подразумевает, что именно ставка реальной заработной платы должна рассматриваться как экзогенно заданная. Современные представители классического направления полагают, что задаваемой величиной следует считать норму прибыли, которая в значительной степени формируется в финансовом секторе экономики. Могут существовать и другие подходы к решению вопроса о том, какие именно параметры будут определяться экзогенно. Например, опасность возникновения социального взрыва в обществе диктует необходимость поддержания соотношения классовых сил на некотором фиксированном уровне, в силу чего можно рассматривать как экзогенный параметр долю «богатых» граждан в населении страны.

Таким образом, однозначное определение стационарного равновесия зависит от представлений исследователя о механизмах реализации экономических явлений и в значительной степени обусловлено содержательной постановкой задачи.

5. Влияние размера государственного долга на распределение национального богатства

Рассмотрим вопрос о том, как изменится стационарное состояние равновесия, если при фиксированном значении g произойдет увеличение размера государственного долга на душу населения: $\tilde{d} = d + \Delta d$, $\Delta d > 0$. Значения капиталовооруженности k^*, ставки процента r^*, ставки заработной платы w^* при этом сохраняются. Указанное увеличение в соответствии с соотношением (7) обеспечивается ростом налоговых выплат: $\tilde{\tau} = \tau^* + \Delta\tau$, где $\Delta\tau = \dfrac{r^*-n}{1+n}\Delta d$. Естественно предположить, что значения τ^* и $\tilde{\tau}$ таковы, что правые части бюджетных ограничений индивидов положительны.

Наследство, получаемое «богатыми» в состоянии равновесия, определяется как решение уравнения $\rho(\omega) = r^*$ относительно z. Если обозначить величину этого наследства при возросшем объеме государственного долга через $\tilde{z}_h$, то в силу уравнения

$$\rho\left[w^* + z - \frac{2+r^*}{1+r^*}(\tau^* + \Delta\tau)\right] = r^*$$

связь между равновесными значениями z_h^* и $\tilde{z}_h$ примет вид:

$$\tilde{z}_h = z_h^* + \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\Delta\tau. \tag{21}$$

Выясним, как изменятся правые части m бюджетных ограничений «бедных» и «богатых» индивидов при увеличении налогов:

$$m_l = (1 + r^*)w^* - (2 + r^*)\tau^*, \tag{22}$$

$$\tilde{m}_l = (1 + r^*)w^* - (2 + r^*)\tau^* - (2 + r^*)\Delta\tau, \tag{23}$$

$$m_h = (1 + r^*)w^* - (r^* - n)z_h^* - (2 + r^*)\tau^*, \tag{24}$$

$$\tilde{m}_h = (1 + r^*)w^* + (r^* - n)z_h^* - (2 + r^*)\tau^* - \frac{(2 + r^*)(1 + n)}{1 + r^*}\Delta\tau. \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\tilde{m}_l = m_l - (2 + r^*)\Delta\tau, \tag{26}$$

$$\tilde{m}_h = m_h - \frac{(2 + r^*)(1 + n)}{1 + r^*}\Delta\tau, \tag{27}$$

и так как при $r^* > n$ выполняется неравенство $\frac{(2 + r^*)(1 + n)}{1 + r^*} < 2 + r^*$, то положение «богатых» ухудшается в меньшей степени, чем положение «бедных».

Изменение бюджетных ограничений индивидов естественным образом влечет получение новых решений задач потребителей. Исследуем качественный и количественный характер изменения потребления в первом периоде жизни «бедных» и «богатых», для чего воспользуемся предположением о том, что потребление и в первом, и во втором периодах является нормальным благом. Если правая часть m бюджетного ограничения индивида уменьшается на некоторую положительную величину Δm, то линия бюджетного ограничения смещается вертикально вниз и новая оптимальная точка окажется внутренней точкой отрезка AB (рис. 1).

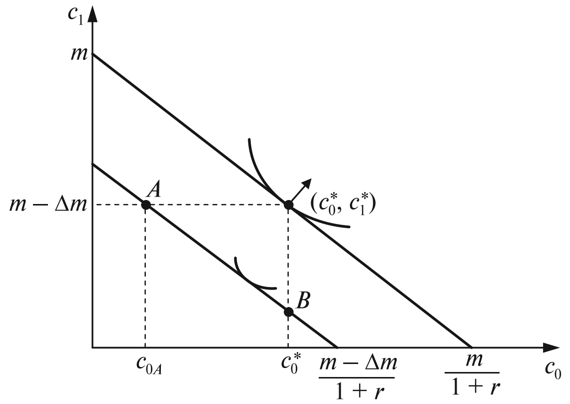

Рис. 1. Определение положения оптимальной точки при изменении бюджетного ограничения

Очевидно, что изменение потребления в первом периоде жизни индивида находится в пределах $0 < c_0^* - \tilde{c}_0 < \Delta c_0^{\max}$, где $\Delta c_0^{\max} = \min\{c_0^*; c_0^* - c_{0A}^*\}$. Предположим, что $c_{0A} \geqslant 0$, тогда $\Delta c_0^{\max} = \frac{\Delta m}{1 + r}$. Используя соотношения (26)—(27), определяющие изменения правых частей бюджетных ограничений «бедных» и «богатых», для потребления двух групп индивидов в молодости будем иметь неравенства:

$$0 < c_{l0}^* - \tilde{c}_{l0} < \Delta c_{l0}^{\max} = \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\Delta\tau, \tag{28}$$

$$0 < c_{h0}^* - \tilde{c}_{h0} < \Delta c_{h0}^{\max} = \frac{(2 + r^*)(1 + n)}{(1 + r^*)^2}\Delta\tau. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь вопрос об изменении сбережений индивидов. Сбережения «бедных», определяемые при размере d государственного долга выражением $s_l^* = w^* - c_{l0}^* - \tau^*$, при увеличении долга на величину $\Delta d > 0$ становятся равными $\tilde{s}_l = w^* - c_{l0}^* - (\tau^* + \Delta\tau)$.

Соотношение (28) позволяет оценить изменение сбережений «бедной» группы индивидов $\Delta s_l = s_l^* - s_l = -(c_{l0}^* - c_{l0}^*) + \Delta\tau$:

$$-\frac{1}{1 + r^*}\Delta\tau < \Delta s_l < \Delta\tau, \tag{30}$$

что говорит о том, что сбережения «бедных» могут расти, падать или оставаться на прежнем уровне в зависимости от вида функции полезности. Геометрически это означает, что если новая оптимальная точка оказывается внутренней точкой отрезка AC, то сбережения увеличиваются, если же оптимальная точка совпадает с точкой C, сбережения будут неизменными, и, наконец, если новая оптимальная точка является внутренней точкой отрезка CB, сбережения «бедных» сокращаются (рис. 2).

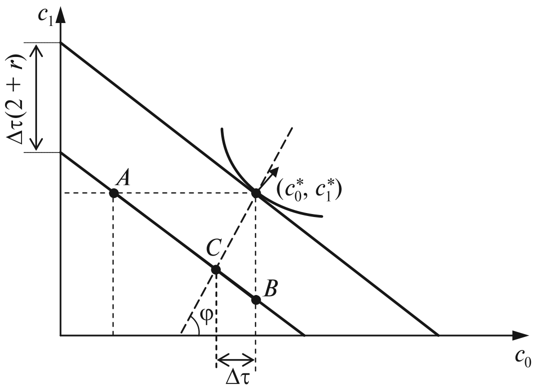

Рис. 2. Геометрическая интерпретация зависимости изменения сбережений «бедных» от положения новой оптимальной точки

Несложно вычислить значение тангенса угла φ, определяющего положение точки C:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(2 + r^*)\Delta\tau - (1 + r^*)\Delta\tau}{\Delta\tau} = 1,$$

откуда $\varphi = 45°$.

Перейдем к изучению характера изменения сбережений «богатых» индивидов. При размере d государственного долга сбережения «богатых» описываются выражением:

$$c_h^* = w^* + z_h^* - c_{h0}^* - \tau^*. \tag{28}$$

Если государственный долг увеличивается на величину $\Delta d > 0$, то сбережения будут определяться равенством:

$$\tilde{s}_h = w^* + \tilde{z}_h - \tilde{c}_{h0} - (\tau^* + \Delta\tau).$$

Соотношения (21), (29) позволяют оценить изменение сбережений группы «богатых» индивидов $\Delta s_h = s^*_{h0} - \tilde{s}_{h0} = -(c^*_{h0} - \tilde{c}_{h0}) - \frac{1}{1+r^*}\Delta\tau$:

$$-\frac{2r^* + 2n + r^*n + 3}{(1+r^*)^2}\Delta\tau < \Delta s_h < -\frac{1}{1+r^*}\Delta\tau, \tag{31}$$

откуда следует, что сбережения «богатых» растут. Сопоставив данный результат с выводами, сделанными при анализе сбережений «бедной» группы индивидов, нетрудно заметить, что этот рост обеспечивается увеличением величины наследства, которое получают «богатые» в новом равновесном состоянии, тогда как наследство «бедных» остается на прежнем нулевом уровне.

Полученные выше оценки (28)—(31) позволяют перейти к рассмотрению вопроса о том, что происходит с долей богатых в населении в стационарном состоянии при возросшем объеме государственного долга. Как следует из последнего условия в определении стационарного равновесия, доля богатых σ^* задается выражением:

$$\sigma^* = \frac{(1+n)(k^* + d) - s^*_l}{s^*_h - s^*_l}. \tag{32}$$

При значении $\tilde{d} = d + \Delta d$, $\Delta d > 0$ доля богатых в населении будет равна:

$$\tilde{\sigma} = \frac{(1+n)(k^* + d + \Delta d) - \tilde{s}_l}{\tilde{s}_h - \tilde{s}_l}. \tag{33}$$

Для того чтобы исследовать изменение s, введем в рассмотрение величины

$$x = s^*_h - (1+n)(k^* + d) = w^* + z^*_h - s^*_{h0} - \tau - (1+n)(k^* + d), \tag{34}$$

$$y = \tilde{s}_h - (1+n)(k^* + \tilde{d}) = w^* + \tilde{z}_h - \tilde{c}_{h0} - (\tau + \Delta\tau) - (1+n)(k^* + d + \Delta d). \tag{35}$$

Их разность

$$y - x = \frac{2+r^*}{1+r^*}\Delta\tau + c^*_{h0} - \tilde{c}_{h0} - \Delta\tau - (1+n)\Delta d =$$

$$= c^*_{h0} - \tilde{c}_{h0} - \left[1 + \frac{(1+n)^2}{r^* - n} - \frac{2+r^*}{1+r^*}\right]\Delta\tau. \tag{36}$$

Используя соотношение (29), получим оценки:

$$-\left[1 + \frac{(1+n)^2}{r^* - n} - \frac{2+r^*}{1+r^*}\right]\Delta\tau < y - x < \left[\frac{(2+r^*)(1+n)}{(1+r^*)^2} - 1 - \frac{(1+n)^2}{r^* - n} + \frac{2+r^*}{1+r^*}\right]\Delta\tau.$$

Заметим, что $1 + \frac{(1+n)^2}{r^* - n} - \frac{2+r^*}{1+r^*} > 0$, а исследование первой производной по r^* выражения $\left[\frac{(2+r^*)(1+n)}{(1+r^*)^2} - 1 - \frac{(1+n)^2}{r^* - n} + \frac{2+r^*}{1+r^*}\right]$ свидетельствует о том, что это возрастающая по r^* функция, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

С использованием введенных величин x, y, доли «богатых» в населении σ^* и $\tilde{\sigma}$ могут быть представлены в виде:

$$\sigma^* = 1 - \frac{x}{s^*_h - s^*_l}, \quad \tilde{\sigma} = 1 - \frac{y}{\tilde{s}_h - \tilde{s}_l}. \tag{37}$$

Рассмотрим разность $(\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l) - (s^*_h - s^*_l)$. В соответствии с соотношениями (28), (29) можем заключить, что $(\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l) - (s^*_h - s^*_l) = (c^*_{h0} - \widetilde{c}_{h0}) - (c^*_{l0} - \widetilde{c}_{l0}) + $ $+ \dfrac{2 + r^*}{1 + r^*}\Delta\tau > 0$, и следовательно, $\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l > s^*_h - s^*_l$.

Предположим далее, что $x \geqslant y$. В этом случае вывод о характере изменения доли «богатых» в населении очевиден: $\dfrac{x}{s^*_h - s^*_l} > \dfrac{y}{\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l}$ и, значит, $\widetilde{\sigma} > \sigma^*$. Выясним, при каких значениях r^* и n указанное предположение допустимо. Из соотношения (36) следует, что $x \geqslant y$, если

$$c^*_{h0} - \widetilde{c}_{h0} \leqslant \left[1 + \frac{(1+n)^2}{r^* - n} - \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\right]\Delta\tau = \frac{1 + 3n + n^2 + 2nr^* + n^2 r^*}{(r^* - n)(1 + r^*)}\Delta\tau. \qquad (38)$$

При экзогенно заданном темпе прироста населения $n > 0$ определим область значений $r^* > n$, для которых выполняется неравенство (38). Используя оценку (29) для изменения потребления «богатых» в первом периоде жизни, можем заключить, что если

$$\frac{1 + 3n + n^2 + 2nr^* + n^2 r^*}{(r^* - n)(1 + r^*)} > \frac{(2 + r^*)(1 + n)}{(1 + r^*)^2}, \qquad (39)$$

то неравенство (38) будет выполнено автоматически. Соотношение (39) эквивалентно неравенству

$$(n^2 + n - 1)(r^*)^2 + (3n^2 + 4n - 1)r^* + 3n^2 + 5n - 1 > 0. \qquad (40)$$

Коэффициент $n^2 + n - 1$ при $(r^*)^2$ отрицателен при $0 < n < n_1$, равен нулю при $n = n_1$ и положителен при $n > n_1$, где $n_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$. Анализ дискриминанта Q указанного выражения показывает, что $Q > 0$ при $0 < n < 1$, $Q = 0$ при $n = 1$ и $Q < 0$ при $n > 1$. Следовательно, действительные корни уравнения

$$(n^2 + n - 1)(r^*)^2 + (3n^2 + 4n - 1)r^* + 3n^2 + 5n - 1 = 0$$

существуют только при $0 < n \leqslant 1$ и определяются равенством:

$$r^*_{1,2} = \frac{-3n^2 - 4n + 1 \pm \sqrt{Q}}{2(n^2 + n - 1)}.$$

Численный анализ корней с последующим изучением возможных решений неравенства (40) при условии $r^* > n$ позволяет сделать вывод о том, что это неравенство выполняется при любых значениях $r^* > n$, за исключением области, определяемой как множество точек $\left\{(r, n)\colon 0 < n < n_1,\ r > \dfrac{-3n^2 - 4n + 1 \pm \sqrt{Q}}{2(n^2 + n - 1)}\right\}$.

Заметим, что полученная область (назовем ее зоной неопределенности) содержит точки с неправдоподобно большими значениями равновесной процентной ставки, и, значит, попасть в эту зону при реальных значениях r^* невозможно, по крайней мере при темпах прироста населения, превосходящих 0,1. Рассмотрим границу указанной области при $0 < n \leqslant 0{,}1$ (рис. 3).

При значениях r^* и n, соответствующих точкам, лежащим в зоне I, будем иметь $x \geqslant y$, и, следовательно, доля «богатых» в населении в состоянии равновесия при возросшем объеме государственного долга превосходит долю «богатых»

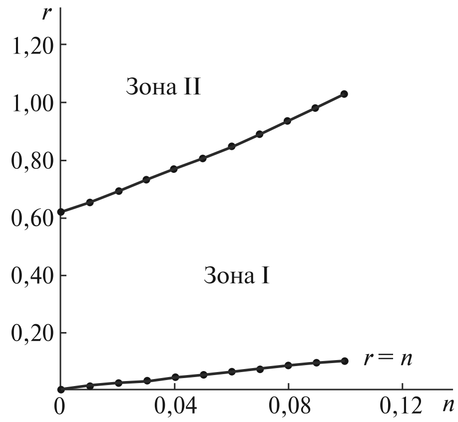

Рис. 3. Положение зон, определяющих характер изменения доли «богатых» в населении

в исходном равновесном состоянии. Если значения r^* и n таковы, что точка (r^*, n) принадлежит зоне II, то вопрос о том, что происходит с равновесной долей «богатых» в населении, не имеет однозначного решения. В этом случае необходимо провести дополнительное исследование, задаваясь конкретным видом функции полезности индивидов.

Предположим, что значения темпа прироста населения и равновесной процентной ставки соответствуют зоне I. Выясним, как изменится доля национального богатства, принадлежащая группе «богатых» индивидов в состоянии равновесия, при увеличении размера государственного долга. Используя оценки (30), (31) и соотношение (37), получим, что доля национальных сбережений, которой владеют «богатые», растет с повышением государственного долга.

Таким образом, стремление правительства поддерживать размер государственного долга на более высоком уровне по сравнению с исходным равновесным состоянием повлечет изменение сбережений индивидов, в общем случае потребует увеличения доли «богатых» граждан и будет сопровождаться эффектом перераспределения национальных сбережений.

6. Количественный анализ влияния размера государственного долга на распределение национального богатства при заданном виде производственной функции и функции полезности

В предыдущем разделе проведен качественный анализ влияния размера государственного долга на распределение национального богатства. Для определения количественного влияния увеличения размера государственного долга на параметры, характеризующие состояние стационарного равновесия, зададимся конкретным видом производственной функции и функции полезности индивидов.

Рассмотрим производственную функцию Кобба—Дугласа $F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. В этом случае

$$f(k) = k^{\alpha}. \tag{41}$$

Предположим, что функция полезности индивидов определяется выражением

$$U(c_0, c_1) = \beta \ln c_0 + \gamma \ln c_1, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0. \tag{42}$$

Пусть далее зависимость эндогенного коэффициента дисконтирования от текущего благосостояния описывается монотонно возрастающей функцией, принимающей значения в интервале (0, 1):

$$\lambda(\omega) = 1 - \frac{1}{\omega + 1} = 1 - \frac{1}{w + z - [(2 + r)/(1 + r)]\tau + 1}. \tag{43}$$

Тогда функция $\rho(\omega)$ имеет вид

$$\rho(\omega) = \frac{1 + n}{\lambda(\omega)} - 1 = n - \frac{1 + n}{w + z - [(2 + r)/(1 + r)]\tau}. \tag{44}$$

Определим k^G как решение уравнения $f'(k) = n$ и зафиксируем некоторое k^*, удовлетворяющее условию $0 < k^* < k^G = \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$.

В этом случае, как уже было отмечено выше,

$$r^* = \alpha(k^*)^{\alpha-1} > n. \tag{45}$$

Значение равновесной ставки заработной платы описывается равенством

$$w^* = (1 - \alpha)(k^*)^{\alpha}. \tag{46}$$

Задаваясь величинами g и d, характеризующими государственные расходы и объем государственного долга, определим размер равновесных налоговых выплат в соответствии с выражением

$$\tau^* = g + \frac{r^* - n}{1 + n} d.$$

Предполагается, что значения экзогенных параметров g и d выбираются таким образом, что правые части бюджетных ограничений индивидов остаются положительными, т. е. выполняется неравенство

$$w^* - \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\tau^* > 0. \tag{47}$$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании согласованного стационарного решения задачи потребителя. В соответствии с теоретическими положениями в стационарном состоянии могут сосуществовать две группы индивидов, «бедные» и «богатые», если

$$\rho\left(w^* - \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\right) = n + \frac{(1 + n)(1 + r^*)}{w^*(1 + r^*) - (2 + r^*)\tau^*} > r^*.$$

При этом «бедные» оставляют своим потомкам нулевое наследство $z_l^* = 0$, а величина наследства «богатых» определяется как решение уравнения $\rho(\omega) = r^*$ относительно z, т. е.

$$z_h^* = \frac{1 + n}{r^* - n} - w^* + \frac{2 + r^*}{1 + r^*}\tau^* > 0. \tag{48}$$

Рассмотрим решение задачи «бедных» потребителей. Условие (12) примет вид

$$\frac{\beta}{c_{l0}^*} = (1 + r^*)\frac{\gamma}{c_{l1}^*}, \tag{49}$$

а бюджетное ограничение описывается равенством

$$(1 + r^*)c_{l0}^* + c_{l1}^* = (1 + r^*)w^* - (2 + r^*)\tau^*. \tag{50}$$

Решая систему уравнений (49), (50), получим

$$c^*_{l0} = \frac{\beta\{w^* - [(2 + r^*)/(1 + r^*)]\tau^*\}}{\beta + \gamma}, \tag{51}$$

$$c^*_{l1} = \frac{\gamma[(1 + r^*)w^* - (2 + r^*)]\tau^*]}{\beta + \gamma}. \tag{52}$$

Что касается «богатых» потребителей, то их ограничение имеет вид

$$(1 + r^*)c^*_{h0} + c^*_{h1} = (1 + r^*)w^* + (r^* - n)z^*_h - (2 + r^*)\tau^* =$$
$$= (1 + n)(1 + w^*) - \frac{(2 + r^*)(1 + n)}{1 + r^*}\tau^*.$$

Решение оптимизационной задачи определяется соотношениями

$$c^*_{h0} = \frac{\beta\{(1 + n)(1 + w^*) - [(2 + r^*)(1 + n)/(1 + r^*)]\tau^*\}}{(\beta + \gamma)(1 + r^*)}, \tag{53}$$

$$c^*_{h1} = \frac{\gamma\{(1 + n)(1 + w^*) - [(2 + r^*)(1 + n)/(1 + r^*)]\tau^*\}}{\beta + \gamma}. \tag{54}$$

Используя полученные результаты (51), (53), найдем сбережения «бедных» и «богатых» индивидов:

$$s^*_l = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}w^* - \frac{(1 + r^*)\gamma - \beta}{(\beta + \gamma)(1 + r^*)}\tau^*, \tag{55}$$

$$s^*_h = \frac{(1 + n)^2\beta + (1 + n)(1 + r^*)\gamma}{(r^* - n)(1 + r^*)(\beta + \gamma)} - \frac{\beta(1 + n)}{(\beta + \gamma)(1 + r^*)}w^* +$$
$$+ \frac{(\beta + \gamma)(1 + r^*) + \beta(1 + n)(2 + r^*)}{(\beta + \gamma)(1 + r^*)^2} \tag{56}$$

Выражения (55), (56) подтверждают общие теоретические положения о характере изменения сбережений двух групп населения: с увеличением налоговых выплат τ^* сбережения «богатых» растут, тогда как сбережения «бедных» могут сокращаться, увеличиваться или оставаться неизменными в зависимости от значения разности $(1 + r^*)\gamma - \beta$. В частности, если $\beta = (1 + r^*)\gamma$, сбережения сохраняются на прежнем уровне. Этот результат согласно выражению (49) соответствует описанному выше случаю, когда прямая, проходящая через оптимальные точки на плоскости (c_0, c_1), пересекает ось абсцисс под углом $\varphi = 45°$ (рис. 2).

Доля «богатых» в населении определяется выражением

$$\sigma^* = \frac{(1 + n)(k^* + d) - s^*_l}{s^*_h - s^*_l}.$$

Если воспользоваться соотношениями (45), (46), можно получить окончательное выражение, связывающее долю «богатых» в населении с параметрами задачи. Эта зависимость достаточно громоздка, что вызывает трудности при ее интерпретации, в силу чего приведем результаты численного анализа.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}75$, $\gamma = 0{,}25$, $n = 0{,}1$, $g = 0{,}1$. В этом случае $k_G = 4{,}803987$, в качестве k^* было выбрано $k^* = 0{,}8k_G$. Тогда $r^* = 0{,}116906$, $w^* = 1{,}048348$. На рис. 4—7 представлены

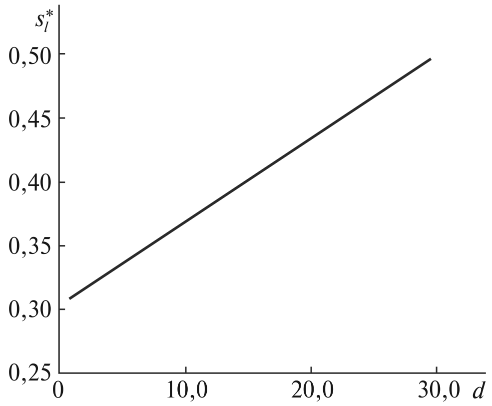

Рис. 4. Зависимость сбережений «бедных» от размера государственного долга

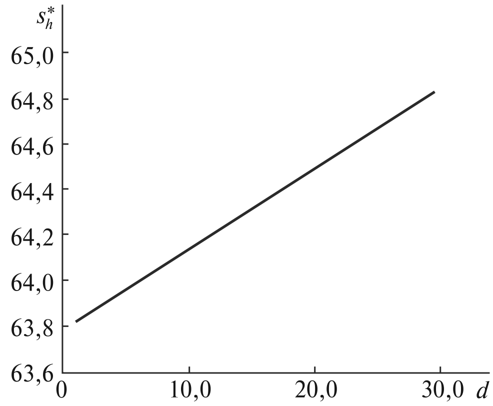

Рис. 5. Зависимость сбережений «богатых» от размера государственного долга

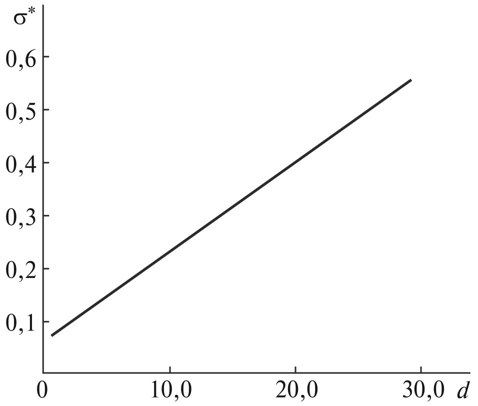

Рис. 6. Зависимость доли «богатых» в населении от размера государственного долга

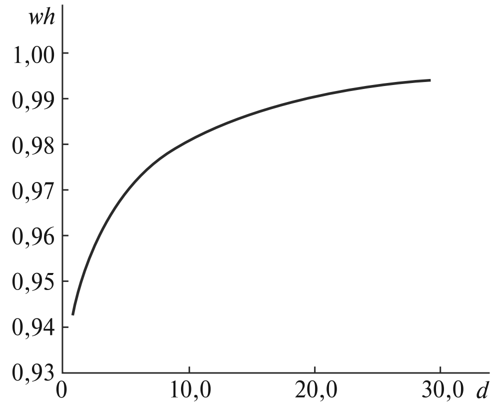

Рис. 7. Зависимость доли национальных сбережений, принадлежащей «богатым», от размера государственного долга

графики зависимости от размера государственного долга d сбережений «бедных» и «богатых» потребителей, а также доли «богатых» в населении и принадлежащей им части национальных сбережений. Характер этих зависимостей одинаков: указанные экономические переменные в равновесном состоянии растут с увеличением государственного долга.

7. Влияние систем социального страхования на распределение национального богатства

Изучим вопрос о том, какое влияние на состояние равновесия оказывает введение различных систем социального страхования: накопительной и распределительной.

Предположим, что в исходном состоянии государственные расходы, государственный долг и налоги отсутствуют. В этом случае благосостояние индивидов в момент времени $\tilde{t}$ определяется выражением

$$\omega(\tilde{t}) = w(\tilde{t}) + z(\tilde{t}),$$

а их бюджетное ограничение перепишется в виде

$$(1 + r(t+1))c_0(t) + c_1(t+1) = (1 + r(t+1))(z(t) + w(t)) - (1 + n)z(t+1). \quad (57)$$

Введенное в разделе 3 понятие стационарного равновесия естественным образом применяется к данной ситуации. Изменения будут относиться к формулировке задачи потребителя, а именно: для $i = h, l$ вектор $(c^*_{i0}, c^*_{i1}, z^*_i)$ является стационарным согласованным решением задачи (4), (57) при $z(0) = z^*_i$, $r(t) = r^*$, $w(t) = w^*$ $(t = 0, 1, ...)$, $0 = z^*_l \leqslant z^*_h$; кроме того, доля «богатых» в населении определяется из уравнения $\sigma^* s^*_h + (1 - \sigma^*)s^*_l = (1 + n)k^*$.

Допустим, что вводится накопительная система социального страхования, т. е. в первый период жизни индивиды вносят в пенсионный фонд вклад в размере p, а во втором периоде получают пенсию $(1 + r)p$. При этом имеется в виду, что пенсионный фонд осуществляет инвестиции в производственный капитал. Очевидно, что подобная система не вносит никаких изменений ни в выражение текущего благосостояния индивида, ни в его бюджетное ограничение. Таким образом, введение в модель накопительной системы социального страхования не меняет равновесное состояние.

Предположим теперь, что вводится распределительная система страхования индивидов, когда в первом периоде жизни они вносят в пенсионный фонд вклад в размере p, а во втором периоде получают пенсию $(1 + n)p$. В этом случае пенсионный фонд никаких вложений в производственный капитал не осуществляет, а производит трансферт от молодого поколения старому. Текущее благосостояние индивида будет описываться выражением

$$\omega(\tilde{t}) = w(\tilde{t}) + z(\tilde{t}) - p + \frac{(1 + n)p}{1 + r(\tilde{t} + 1)} = w(\tilde{t}) + z(\tilde{t}) - \frac{r(\tilde{t} + 1) - n}{1 + r(\tilde{t} + 1)}p.$$

Бюджетное ограничение индивидов также изменится и примет вид

$$(1 + r(t + 1))c_0(t) + c_1(t + 1) = (1 + r(t + 1))(z(t) + w(t) - p) + \\ + (1 + n)(p - z(t + 1)).$$

Это означает, во-первых, что величина наследства, которое «богатые» оставляют своим потомкам в новом стационарном состоянии, станет равной

$$\tilde{z}_h = z^*_h + \frac{r^* - n}{1 + r^*}p, \tag{58}$$

где z^*_h — наследство «богатых» индивидов в исходном стационарном состоянии, до введения распределительной системы социального страхования.

Во-вторых, решения задач «бедных» и «богатых» потребителей определяются при других ограничениях. Сохраняя систему обозначений, принятую в разделе 5, выясним, как изменятся правые части m бюджетных ограничений «бедных» и «богатых» индивидов:

$$\tilde{m}_l = m_l - (r^* - n)p, \tag{59}$$

$$\tilde{m}_h = m_h - \frac{(r^* - n)(1 + n)}{1 + r^*}p, \tag{60}$$

и так как при $r^* > n$ выполняется неравенство $\dfrac{(r^* - n)(1 + n)}{1 + r^*} < r^* - n$, то положение «богатых» ухудшается в меньшей степени, чем положение «бедных».

Используя соотношения (59), (60), определяющие изменения правых частей бюджетных ограничений «бедных» и «богатых», для потребления двух групп индивидов в молодости будем иметь неравенства:

$$0 < c_{l0}^* - \widetilde{c}_{l0} < \Delta c_{l0}^{\max} = \frac{r^* - n}{1 + r^*}\, p, \tag{61}$$

$$0 < c_{h0}^* - \widetilde{c}_{h0} < \Delta c_{h0}^{\max} = \frac{(r^* - n)(1 + n)}{(1 + r^*)^2}\, p. \tag{62}$$

Соотношения (61), (62) позволяют оценить изменения сбережений $\Delta s_l = s_l^* - \widetilde{s}_l = -(c_{l0}^* - c_{l0}^*) + p$ «бедной» и $\Delta s_h = s_h^* - \widetilde{s}_h = -(c_{h0}^* - c_{h0}^*) + \dfrac{1+n}{1+r^*}\, p$ «богатой» групп индивидов:

$$\frac{1 + n}{1 + r^*}\, p < \Delta s_l < p, \tag{63}$$

$$\left(\frac{1 + n}{1 + r^*}\right)^2 p < \Delta s_h < \frac{1 + n}{1 + r^*}\, p, \tag{64}$$

откуда следует, что сбережения «бедных» и «богатых» в стационарном состоянии после введения распределительной пенсионной системы сокращаются.

Полученные выше оценки (63), (64) позволяют перейти к рассмотрению вопроса о том, что происходит с долей «богатых» в населении в стационарном состоянии при введении распределительной системы социального страхования. Как следует из последнего условия в определении стационарного равновесия, доля богатых σ^* задается выражением

$$\sigma^* = \frac{(1 + n)k^* - \widetilde{s}_l}{s_h^* - \widetilde{s}_l}.$$

При введении распределительной пенсионной системы доля «богатых» в населении будет равна

$$\widetilde{\sigma} = \frac{(1 + n)k^* - s_l^*}{\widetilde{s}_h - s_l^*}.$$

Для того чтобы исследовать изменение s, как и в разделе 5, введем в рассмотрение величины $x = s_h^* - (1 + n)k^*$ и $y = \widetilde{s}_h - (1 + n)k^*$, разность которых $y - x = -\Delta s_h$.

Используя соотношение (64), получим оценку $y - x < -\left(\dfrac{1 + n}{1 + r^*}\right)^2 p$, откуда следует, что $x > y$.

С использованием введенных величин x, y доли богатых в населении σ^* и $\widetilde{\sigma}$ могут быть представлены в виде

$$\sigma^* = 1 - \frac{x}{s_h^* - s_l^*}, \quad \widetilde{\sigma} = 1 - \frac{y}{\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l}.$$

Рассмотрим разность $(\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l) - (s_h^* - s_l^*)$. В соответствии с соотношениями (63), (64) можем заключить, что

$$(\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l) - (s_h^* - s_l^*) = \Delta s_l - \Delta s_h > \Delta s_l^{\max} - \Delta s_h^{\max} = \frac{1 + n}{1 + r^*}\, p - \frac{1 + n}{1 + r^*}\, p = 0,$$

и следовательно, $\widetilde{s}_h - \widetilde{s}_l > s_h^* - s_l^*$.

Очевидно, что $\frac{x}{s_h^* - s_l^*} > \frac{y}{\tilde{s}_h - \tilde{s}_l}$ и, значит, $\tilde{\sigma} > \sigma^*$. Таким образом, стационарное состояние при наличии распределительной пенсионной системы характеризуется большей долей «богатых» в населении по сравнению с равновесным состоянием при отсутствии социального страхования.

Изучим теперь вопрос о том, как меняется распределение совокупного производственного капитала между группами «богатых» и «бедных» индивидов. Как уже было отмечено, сбережения «бедных» сокращаются, т. е. $\tilde{s}_l < s_l^*$, кроме того, $1 - \tilde{\sigma} < 1 - \sigma^*$. Следовательно, $(1 - \tilde{\sigma})\tilde{s}_l < (1 - \sigma^*)s_l^*$, что говорит об уменьшении суммарных сбережений «бедного» населения. Сопоставление двух стационарных состояний позволяет сделать вывод о том, что при наличии распределительной пенсионной системы «богатые» владеют большей долей национального богатства.

Таким образом, равновесное состояние с распределительной системой социального страхования по сравнению с исходным состоянием характеризуется более низким уровнем сбережений индивидов, большей долей «богатых» в населении и большей частью национального богатства, принадлежащего «богатым».

8. Заключение и общие выводы

В данной работе исследованы последствия увеличения размера государственного долга и введения систем социального страхования в модели роста с эндогенным коэффициентом дисконтирования. Теоретический анализ проводился для произвольного вида производственной функции и функции полезности, в силу чего носит общий характер и может применяться при анализе широкого класса задач подобного типа. Использованный подход позволил произвести всестороннее исследование характера изменения важнейших экономических переменных и сделать следующие основные выводы.

1. В состоянии стационарного равновесия могут сосуществовать две группы потребителей — «бедные» и «богатые». Доля «богатых» в населении в рамках предлагаемой модели определяется эндогенно.

2. Доказано, что стационарное равновесие существует, но характеризуется сраффианской неопределенностью. Для получения однозначного равновесного состояния следует задать любой из параметров, определяющих равновесие. Выбор экзогенного параметра зависит от представлений исследователя о механизмах реализации экономических явлений и в значительной степени обусловлен содержательной постановкой задачи.

3. Стремление правительства поддерживать размер государственного долга на более высоком уровне по сравнению с исходным равновесным состоянием влечет сокращение уровня извлекаемой полезности для обеих групп индивидов, при этом положение «богатых» ухудшается в меньшей степени, чем положение «бедных»; изменение сбережений индивидов: сбережения «богатых» растут, а характер изменения сбережений «бедных» зависит от конкретного вида функции полезности.

4. В аналитической форме определена граница области изменения равновесной процентной ставки и темпа прироста населения, когда может быть сделан однозначный вывод об увеличении доли «богатых» в населении. Указанная область соответствует правдоподобным значениям процентной ставки и темпа прироста населения.

5. Проведен качественный анализ влияния размера государственного долга на распределение национального богатства. Увеличение доли «богатых» граж-

дан сопровождается эффектом перераспределения национальных сбережений в их пользу.

6. Для конкретного вида производственной функции и функции полезности проведен количественный анализ влияния размера государственного долга на распределение национального богатства, который подтверждает достоверность теоретических положений.

7. Введение в модель накопительной системы социального страхования не оказывает влияния на равновесное состояние.

8. Стационарное состояние при наличии распределительной пенсионной системы по сравнению с равновесным состоянием при отсутствии социального страхования характеризуется сокращением сбережений индивидов, большей долей «богатых» в населении, большей долей национального богатства, принадлежащей «богатым».

Источники

Борисов К. Ю. Равновесные траектории в модели экономического роста с эндогенным дисконтированием // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VII / под ред. А. А. Корбута, С. Л. Печерского, Л. А. Руховца. СПб., 2009. С. 5—28.

Борисов К. Ю., Сурков А. В. Об одной модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VII / под ред. А. А. Корбута, С. Л. Печерского, Л. А. Руховца. СПб., 2009. С. 29—50.

Борисов К. Ю. Неоклассическое равновесие и сраффианская неопределенность // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. Вып. 3. СПб., 2002.

Barro R. J. Are government bonds net wealth? // Journal of Political Economy. 1974. Vol. 82. P. 1095—1117.

Blanchard O.-J. and *Fischer S.* Lectures on macroeconomics. Cambridge (Ma), 1989.

Borissov K. Indeterminate Steady-State Equilibria in a One-Sector Neoclassical Model. European University at St.-Petersburg, Department of Economics. Working paper 2001/01.

Borissov K. Indeterminacy of Distribution in a General Equilibrium Model. European University at St.-Petersburg, Department of Economics. Working paper 2002/02.

Diamond P. A. National debt in a neoclassical growth model // American Economic Review. 1965. Vol. 55. P. 1126—1150.

Foley D. K., *Michl T. R.* Social security in a classical growth model. CEPA Working Paper Series II. 2000. Working Paper 2000/11.

Mankiw N. G. The savers-spenders theory of fiscal policy. NBER Working Paper 7571, 2000.

Mandler M. Sraffian indeterminacy in general equilibrium // Review of Economic Studies. 1999. Vol. 66. P. 693—711.

Sraffa P. Production of commodities by means of commodities. Cambridge, 1960. (Русский перевод: *Сраффа П.* Производство товаров посредством товаров. М., 1999.)