

# ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ

**А. В. Воронцовский<sup>1</sup>**

докт. экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета

## **МНОГОПЕРИОДНЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ КАПИТАЛА С УЧЕТОМ РИСКОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ В РЕАЛЬНЫЙ СЕКТОР ЭКОНОМИКИ**

В условиях развитых рыночных отношений одной из существенных экономических проблем становится текущая оценка стоимости бизнеса или, в более узком смысле, оценка стоимости капитала, вкладываемого в тот или иной проект. Она важна как при обосновании сумм инвестиций в данный бизнес, так и при анализе условий или возможностей его продажи. Основная суть проблемы обусловлена тем, что текущая оценка стоимости капитала является производной от тех будущих доходов, которые обеспечивает его применение или по крайней мере которые ожидают получить его собственники, менеджеры или потенциальные покупатели. Такая оценка предполагает прогнозирование или обоснование таких доходов в зависимости от планируемого использования имеющихся активов бизнеса. Кроме того, рассматриваемые будущие доходы носят, как правило, рискованный характер, и это оказывает существенное влияние на используемые методы оценки стоимости капитала. Будем предполагать, что будущие доходы возникают в процессе инвестиционной деятельности. Тогда оценка стоимости капитала определяется ожидаемыми результатами осуществляемых инвестиций.

Существуют различные подходы к определению стоимости капитала, прежде всего имеется в виду метод дисконтированного денежного потока, который нашел наиболее широкое практическое применение (Бартонеш, Найт, 2004, с. 173—176; Бирман, Шмидт, 2003, с. 64—82; Валдайцев, 2001, с. 64—82; Оценка бизнеса, 2005, с. 153—167; Виленский, Лифшиц, Смоляк, 2008). Основные проблемы применения этого метода связаны с обоснованием денежных потоков будущих доходов и косвенным учетом факторов риска. Важную роль в современных условиях играет так называемый метод управления стоимостью компании, который направлен на обеспечение роста рыночной стоимости компании и ее акций (Коупленд, Мурин, 1999).

Появление и развитие теории оценки рыночных опционов, опирающихся на формирование и определение стоимости так называемых эквивалентных портфелей, привлекли внимание с точки зрения возможности использования подобных подходов для оценки стоимости реального бизнеса. Эквивалентные портфели имеют такие же будущие рискованные доходы, как и рассматриваемый бизнес, а следовательно, и одинаковый с ним риск, при этом они состоят из ри-

---

<sup>1</sup> Эл. адрес: a.vorontsovskiy@econ.pu.ru

сковых и безрисковых активов, которые имеют текущую рыночную цену. Текущая стоимость эквивалентного портфеля позволяет определить равновесную цену рыночных опционов в условиях отсутствия арбитражных возможностей<sup>1</sup>. Этот подход к определению равновесных рыночных цен почти сразу попытались применить к оценке стоимости капитала, приносящего те или иные рисковые доходы. В настоящее время данный подход рассматривается как один из возможных подходов к оценке стоимости капитала, позволяющих учесть будущие рисковые доходы.

В общем случае указанный подход может быть использован для оценки стоимости капитала при условии, что он обеспечивает в будущем получение рисковых доходов. При этом воспользуемся для оценки текущей стоимости рисковых доходов бизнеса биномиальной моделью, которая может быть использована для оценки равновесной рыночной цены рыночного опциона<sup>2</sup>.

В этом случае текущая оценка будущих рисковых доходов предполагает формирование эквивалентных портфелей, приносящих те же будущие доходы в каждом состоянии экономики, что и рассматриваемая инвестиция, проект или бизнес в целом. Эквивалентные портфели формируются из рисковых и безрисковых активов, текущая цена которых известна. В состоянии рыночного равновесия цена рассматриваемого объекта или некоторой рисковой инвестиции должна совпадать со стоимостью эквивалентного портфеля, поскольку по определению они приносят одинаковые будущие доходы. Как показал в свое время Ж. Дэбрэ, в состоянии рыночного равновесия объекты, обеспечивающие в будущем периоде одинаковые доходы, должны в текущем периоде стоять на рынке одинаково (Debreu, 1959).

В принципе можно выделить два основных подхода к подобной оценке. Во-первых, речь идет об определении прироста ожидаемой чистой настоящей стоимости (Воронцовский, 2005, с. 219—252). Иногда, чтобы выделить рисковую составляющую будущих доходов в условиях применения реальных опционов, говорят о стратегической (Бирман, Шмидт, 2003, с. 19, 533) или реальной чистой настоящей стоимости (Бригхем, Гапенски, 1997, с. 258—260). Во-вторых, для оценки капитала с учетом реальных опционов используются подходы, применяемые в теории оценки рыночных опционов. При анализе бизнес-процессов с длительным периодом использования будем рассматривать только дискретный процесс получения доходов в каждом подпериоде. Проекты с непрерывным потоком доходов, которые могут быть оценены на основе формулы Блэка—Скоулза и ее модификаций, рассматривать не будем (Люу, 2007, с. 270—302).

Подобные оценки рисковых доходов в любой форме их выражения могут быть использованы двояким образом. Во-первых, для определения предельного объема инвестиционных расходов на получение рассматриваемого потока рисковых доходов, а во-вторых, для определения прироста текущей стоимости капитала, который обеспечивает получение этих доходов в будущем.

## 1. Определение стоимости опциона на продажу с длительным периодом исполнения

Рассмотрим основные подходы к определению стоимости опциона на продажу в условиях длительного периода его исполнения на основе биномиальной

<sup>1</sup> Этот подход впервые был использован при обосновании равновесных рыночных цен рыночных опционов. Имеется в виду простейший однопериодный вариант известной формулы Кокса—Росса—Рубинштейна (Cox, Ross, Rubinstein, 1979. P. 229—263; Cox, Rubinstein, 1985).

<sup>2</sup> Об использовании биномиальной модели для оценки инвестиций и стоимости капитала подробнее см. (Фабозци, 2000, с. 410—418; Халл, 2007, с. 345—372; Deutsch, 2001; Mueller-Moehl, 2001).

модели и отметим особенности ее использования в условиях реальных опционов. Будем считать, что выполняются следующие исходные предпосылки:

- рассматриваемый период исполнения проекта разбивается на  $t$  подпериодов;  $t = 0, 1, \dots, T$ ;
- в каждый подпериод выделяются только два будущих состояния экономики, в одном из которых цена базового актива либо возрастает с постоянным темпом роста  $a$  и вероятностью  $P$ , либо изменяется с темпом роста  $b$  с вероятностью  $1 - P$ ;
- не предусматривается промежуточных выплат по базовому активу в течение рассматриваемого периода;
- в каждый период предполагается возможность формирования эквивалентных портфелей из рискового и безрискового актива, которые приносят такие же доходы, что и рассматриваемая инвестиция.

Обозначим цену исполнения по опциону через  $p_k$ ;  $p_0$  — текущая цена базового актива;  $r$  — безрисковая ставка процента. При этом  $b < 1 + r < a$ . Если это соотношение нарушается, то можно показать, что рисковый или безрисковый активы просто исчезнут с рынка.

В этих условиях стоимость опциона на покупку существенно зависит от темпов роста цены в каждом из двух возможных состояний экономики. Определим доход по опциону в первом периоде при условии реализации первого состояния экономики  $C(a)$  следующим образом:

$$C(a) = \max\{ap_0 - p_k, 0\},$$

а при наступлении второго будущего состояния  $C(b)$  так:

$$C(b) = \max\{bp_0 - p_k, 0\}.$$

С учетом этих выражений формулу для определения стоимости опциона со сроком исполнения, равным одному периоду, можно записать в следующем виде<sup>1</sup>:

$$C(1) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C(a) + \frac{b-1-r}{a-b} C(b) \right]. \quad (1)$$

Рассмотрим особенности определения стоимости опциона с периодом исполнения, равным два года. Во втором году можно выделить четыре будущих состояния экономики, каждая пара из которых определяется в зависимости от соответствующего состояния экономики первого периода. Обозначим их в зависимости от роста цены базового актива следующим образом:

$$\begin{aligned} C(aa) &= \max\{aap_0 - p_k, 0\}; & C(ab) &= \max\{abp_0 - p_k, 0\}; \\ C(ba) &= \max\{bap_0 - p_k, 0\}; & C(bb) &= \max\{bbp_0 - p_k, 0\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для каждой пары таких доходов, определяемой одним прошлым состоянием экономики, можно оценить их стоимость в первом периоде, используя формулу (1), которая в данном случае покажет оценку пары рисковых доходов второго периода в первом периоде. При условии, что цена в первом периоде возрастала с темпом роста, равным  $a$ , получаем следующее выражение:

$$C_a(2, 1) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C(aa) + \frac{b-1-r}{a-b} C(ab) \right]. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Вывод этой формулы на основе безрискового портфеля из базового рискового актива и опциона см. в (Фабозци, 2000, с. 410–415).

Аналогично для второй пары доходов при условии, что цена базового актива в первом периоде возростала с темпом роста  $b$ , можно получить следующее выражение:

$$C_b(2, 1) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C(ba) + \frac{b-1-r}{a-b} C(bb) \right]. \quad (4)$$

Для того чтобы оценить стоимость полученных значений объема доходов второго периода в первом периоде по отношению нулевому периоду, представим себе опцион с доходами, определяемыми по формулам (3) и (4). Тогда стоимость опциона с исполнением через два периода можно выразить через стоимость опционов с исполнением через один период, применяя к полученным выражениям формулу (1). В данном случае она примет вид:

$$C(2, 0) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C_a(2, 1) + \frac{b-1-r}{a-b} C_b(2, 1) \right]. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет определить стоимость опциона со сроком исполнения два периода через стоимости опционов определенного вида со сроком исполнения один период.

Подобный подход можно использовать для оценки стоимости опциона с любым дискретным периодом до исполнения при условии, что цена базового актива изменяется с темпами роста  $a$  или  $b$  каждый выделенный подпериод. Для этого необходимо определить доходы в конце рассматриваемого периода по аналогии с формулами (2).

Обозначим через  $p_t$  цену базового актива в период  $t$ . Тогда, учитывая ее изменение в периоде  $t+1$  с темпами роста  $a$  и  $b$  и используя формулу (1) для двух соседних периодов  $t$  и  $t+1$ , можно получить оценку соответствующей пары доходов по опциону периода  $t+1$  в периоде  $t$

$$C(t+1, t) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C(ap_t) + \frac{b-1-r}{a-b} C(bp_t) \right]. \quad (6)$$

Если рассматривать многопериодный опцион, то через  $t$  периодов будем иметь  $2^t$  возможных значений будущих доходов. Обозначим через  $k$  индекс варианта развития в течение периода длительностью  $t$ , причем  $k = 1, 2, \dots, 2^t$ . Определим доходы по многопериодному опциону в периоде  $t+1$  следующим образом:

$$C_{am}^k(a^m b^{t-m} p_0, t) = \max\{a(a^m b^{t-m}) p_0 - p_k, 0\}; \quad (7)$$

представляет доход по опциону в период  $t+1$  при условии, что в течение предшествующих  $t$  подпериодов цена возростала  $m$  раз с темпом роста  $a$  и, соответственно,  $t-m$  раз с темпом роста  $b$ , а в подпериоде  $t+1$  цена возростала с темпом роста, равным  $a$ , и за период длительностью  $t$  был реализован  $k$ -й вариант развития.

$$C_{bm}^k(b(a^m b^{t-m}) p_0, t) = \max\{b(a^m b^{t-m}) p_0 - p_k, 0\} \quad (8)$$

выражает доход по опциону в период  $t+1$  при условии, что в течение предшествующих  $t$  подпериодов  $m$  раз цена возростала с темпом роста  $a$  и, соответственно,  $t-m$  раз с темпом роста  $b$ , а в периоде  $t+1$  цена возростала с темпом роста, равным  $b$ , и за период длительностью  $t$  был реализован  $k$ -й вариант развития.

Для оценки стоимости этих доходов в периоде  $t$  воспользуемся формулой (6), учитывая, что доходы по многопериодному опциону в периоде  $t+1$  определяются в соответствии с формулами (7) и (8) соответственно. Тогда получим

$$C_m^k(t+1, t) = \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C_{am}^k(a(a^m b^{t-m})p_0, t) + \frac{a-1-r}{a-b} C_{bm}^k(b(a^m b^{t-m})p_0, t) \right], \quad (9)$$

где  $C_m^k(t+1, t)$  — стоимость рассматриваемой пары рискованных доходов периода  $t+1$  в периоде  $t$  при условии, что в течение предшествующих  $t$  периодов  $m$  раз цена возрастала с темпом роста  $a$ , и, соответственно,  $t-m$  раз с темпом роста  $b$  и за период длительностью  $t$  был реализован  $k$ -й вариант развития.

Тогда суммарную оценку стоимости рискованных доходов по опциону периода  $t+1$  в периоде  $t$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^t} C_m^k(t+1, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{2^t} \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+r-b}{a-b} C_{am}^k(a(a^m b^{t-m})p_0, t) + \frac{b-1-r}{a-b} C_{bm}^k(b(a^m b^{t-m})p_0, t) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно определить стоимость доходов по опциону периода  $t+1$  в периоде  $t-1$  и далее до начального периода. Будем считать, что выбрано такое наименьшее целое  $m$ , что рыночная цена базового актива опциона в период  $t$  будет больше, чем цена исполнения по опциону. Формально это означает

$$a^m b^{t-m} p_0 > p_k. \quad (10)$$

Выполнение условия (10) означает, что опцион на покупку будет исполнен в конце периода  $t$ . Это означает, что:

$$C(a^m b^{t-m} p_0, t) = \max\{a^m b^{t-m} p_0 - p_k, 0\} = a^m b^{t-m} p_0 - p_k. \quad (11)$$

Если раскрыть стоимость промежуточных доходов в явном виде, а также учесть, что среди всевозможных исходов в каждом подпериоде для определенной их части значения будущих доходов совпадают, а количество этих совпадений определяется специальными коэффициентами биномиального распределения, и принять во внимание условие (11), то можно показать, что текущую стоимость опциона с периодом исполнения, равным  $t-C(t)$ , можно определить в следующем виде при условии, что цена за каждый отдельный подпериод может измениться с темпом роста, равным либо  $a$ , либо  $b$ :

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{(1+r)^t} \left[ \sum_{m=1}^t \frac{t!}{(t-m)!m!} q^m (1-q)^{t-m} C\{a^m b^{t-m} p_0 - p_k, 0\} \right]; \\ q &= \frac{1+r-b}{a-b}, \quad 1-q = \frac{b-1-r}{a-b}; \\ t! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot t; \quad m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m; \quad (t-m)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (t-m). \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) представляет собой известную формулу, предложенную в 1979 г. Дж. Коксом, С. Россом и М. Рубинштейном для определения стоимости опциона на покупку<sup>1</sup>, с периодом до исполнения равным  $t$ .

Возможности применения этой формулы существенно зависят от разбиения рассматриваемого периода до исполнения опциона на соответствующие подпериоды. Эти подпериоды должны быть относительно малы, в противном случае формула (12) позволяет получить довольно грубые приближенные оценки. В соответствии с этой формулой стоимость опциона также не зависит от вероятно-

<sup>1</sup> Подробный вывод формулы Кокса—Росса—Рубинштейна из более общих соображений см. в (Мельников, Волков, Нечаев, 2001, с. 54—57).

стей наступления выделенных будущих состояний экономики, а определяется только в зависимости от возможных значений цен в каждый период. Основная особенность применения полученных формул для оценки текущей стоимости рисковых доходов от реальных инвестиций связана с оценкой темпов роста цены базового актива  $a$  и  $b$ , поскольку сам производимый продукт, как и продукты-аналоги, может отсутствовать на рынке. Следовательно, и каких-либо рыночных оценок указанных параметров просто не существует. В этом случае речь может идти об оценке и учете субъективных ожиданий, при этом чем больше длительность рассматриваемого периода, тем менее содержательной представляется оценка этих ожиданий. При оценке устойчивости полученного решения могут быть полезны имитационные расчеты.

Формулы (6) и (12) позволяют выделить два подхода к оценке многопериодных опционов. Применение формулы (12) позволяет получить оценку рисковых доходов на нулевой период при условии, что каждый подпериод цена базового актива изменялась только в соответствии с зафиксированными темпами роста  $a$  и  $b$ .

Последовательное применение формулы вида (6) позволяет пересчитывать пару рисковых доходов одного подпериода по отношению к предыдущему подпериоду. Такой последовательный пересчет позволяет получить в конечном итоге оценку рисковых доходов периода  $t$  на нулевой период и определить текущую или настоящую стоимость этих доходов. Определенное преимущество подобного метода состоит в том, что в принципе он позволяет учитывать различные темпы прироста цены базового актива по подпериодам. Реализации этого метода будет показана ниже.

## 2. Применение теории опционов при оценке рисковых инвестиций

Рассмотрим возможности использования полученных соотношений для оценки многопериодных рисковых инвестиций. При этом будем многократно использовать формулу оценки стоимости опциона на покупку, имеющего период исполнения, равный единице, для любых соседних периодов (6). Предположим, что некоторая фирма рассматривает возможности исполнения некоторого рискового инвестиционного проекта, прибыль по которому меняется каждый год в соответствии с биномиальной моделью следующим образом. Денежный поток доходов в каждом периоде разделим на две части. Во-первых, выделим объем дохода, который зависит от риска изменения цен и других внешних факторов риска, а во-вторых, рассмотрим объем условно-постоянных расходов, которые не зависят от риска изменения цен на продукцию. Будем считать, что эти расходы зависят только от темпов инфляции. От простоты будем считать, что темпы инфляции постоянны в течение рассматриваемого периода. Впервые подобная идея разделения расходов капитала (или используемых ресурсов) при оценке инвестиций и анализе стоимости фирмы была использована в конце 1960-х гг. в условиях концепции регулируемых издержек (англ. *adjustment cost*), в рамках которой были выделены либо изменение накопления капитала, либо фискальные расходы, обусловленные государством<sup>1</sup>. В дальнейшем подобный подход был использован в рамках более сложных моделей оценки инвестиций и стоимости бизнеса на основе стохастических дифференциальных уравнений (см., напр.: Abel, 1983, p. 228—233).

Предположим, что можно установить базовый условный объем дохода ( $S$ ) по проекту в текущий период, определяемый без учета условно-постоянных расхо-

<sup>1</sup> Подобный подход чаще рассматривают в условиях непрерывных моделей, см., напр., (Gould, 1968, p. 47—56; Lucas, 1967, p. 321—334; Treadway, 1969, p. 227—234).

дов. Известны темпы роста указанного условного дохода в каждом из двух будущих состояний экономики  $a$  и  $b$ . Задан период  $T$ , в течение которого предполагается исполнение проекта. Пусть далее известен объем условно-постоянных расходов в текущем периоде, который изменяется во времени с учетом темпа инфляции  $i$ . При определении окончательного объема дохода будем учитывать, что он может принимать либо положительное, либо нулевое значение. Отрицательный доход в данном разделе рассматривать не будем. Тогда в первом году доход при наступлении одного из двух будущих состояний экономики определяется как разность базового объема условного дохода нулевого года, умноженного на соответствующий темп роста, за вычетом условно-постоянных расходов с учетом темпа роста инфляции. Тогда доход в каждом будущем состоянии экономики в первом году можно определить так, как показано на рис. 1.

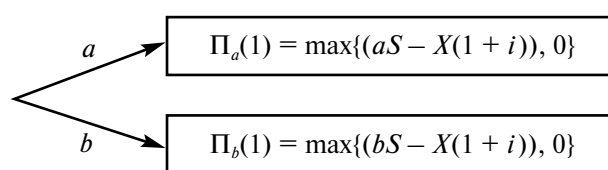


Рис. 1. Объем дохода в первый год

Доход, который может быть достигнут во втором году, определяется в зависимости от того, какое будущее состояние экономики было выделено в первом периоде и какое состояние экономики рассматривается во втором периоде. Состояние экономики определяется темпом роста базового условного дохода без учета условно-постоянных расходов —  $a$  или  $b$ . Тогда во втором периоде соответствующие объемы доходов с учетом постоянных темпов инфляции можно определить по формулам, показанным на рис. 2.

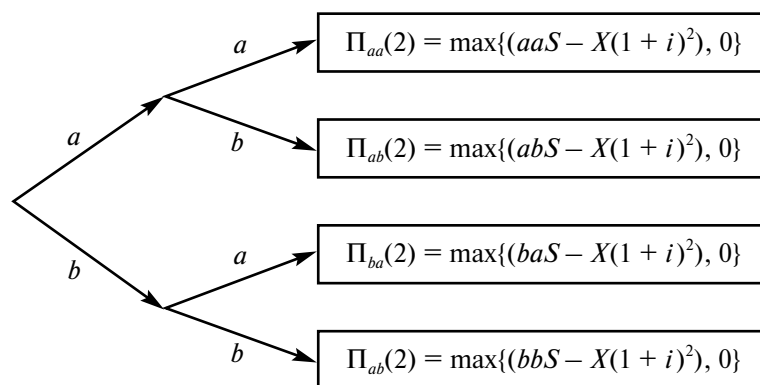
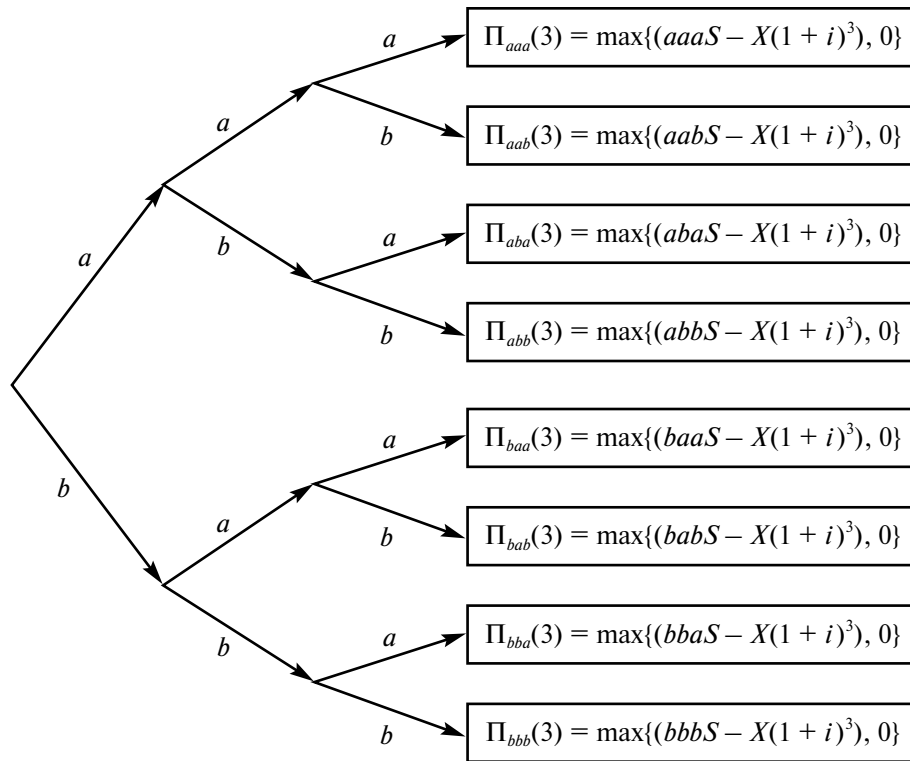


Рис. 2. Определение доходов во второй год

При анализе объема дохода, который может быть получен в третьем периоде, можно выделить восемь состояний экономики (рис. 3), но при этом следует отметить, что фактически выделяются четыре основные формулы, которые используются для расчетов доходов в рамках рассматриваемой биномиальной модели. Это определяется тем, что указанные формулы зависят не от того, в какой последовательности были рассмотрены изменения темпов роста базовой части условного дохода от периода к периоду, а от того, какие коэффициенты были при этом учтены. Выделяются четыре последовательности таких коэффициентов:  $aaa$ ,  $aab$ ,  $abb$ ,  $bbb$ . Аналогично можно представить объем прибыли в четвертом, пятом и всех последующих годах.



**Рис. 3. Объем доходов в третьем году (на линиях обозначены темпы роста базовой части условного дохода без учета условно-постоянных расходов)**

Следует иметь в виду, что при оценке многопериодного проекта материального инвестирования нам необходимо определить текущую стоимость этого проекта, учитывая распределение доходов за каждый год в течение всего периода исполнения данного проекта. Это означает, что нужно определить настоящую стоимость будущих доходов не только каждого отдельного года, но суммарную настоящую или текущую стоимость всего потока рискованных доходов за весь период исполнения рассматриваемого проекта.

Приведенные на рис. 1–3 условия изменения дохода и формулы расчета показывают, что рассматриваемый процесс оценки величины доходов каждого года или иного выделенного подпериода можно представить как процесс оценки опциона на продажу, имеющего период до погашения, равный длительности периода, за который оценивается доход. Общая оценка настоящей стоимости будущих рискованных доходов, или, что то же самое, предельная настоящая стоимость рискованного проекта, обеспечивающего получение рассматриваемых доходов в течение всего периода использования проекта, будет равна сумме полученных значений этих оценок.

Воспользуемся для определения настоящей стоимости подобного проекта теорией опционов. Для этого, с одной стороны, можно было бы применить формулу Кокса—Росса—Рубинштейна (12), определив минимальное значение  $m$ , при котором получается положительное значение доходов, с другой — применить подход, который был положен в основу теории опционов, — оценку стоимости опционов, имеющих срок до исполнения равный одному периоду (6). В последнем случае, который рассмотрим подробнее, выделим распределения доходов по годам исполнения проекта по отдельности по аналогии с распределениями доходов для 1-го, 2-го и 3-го года соответственно, представленными на



рис. 1—3. Аналогичные соотношения можно получить для любого года в течение всего периода исполнения проекта. Проинтерпретируем распределение доходов для каждого года как доходы по опциону со сроком исполнения в рассматриваемом году. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Приведенные формулы расчета доходов в каждом будущем состоянии экономики в принципе совпадают с формулами оценки доходов для опционов на покупку с той разницей, что в качестве цены исполнения мы рассматриваем объем условно-постоянных расходов с учетом инфляции, а в качестве исходной цены базового актива выступает базовый объем условного дохода нулевого года, определяемый с учетом только условно-переменных расходов. При этом положительный доход по данным опционам возникает в том случае, если доход за вычетом условно-переменных расходов больше, чем установленная сумма условно-постоянных расходов. Только в этом случае возникает положительный доход по проекту. В противном случае считаем, что доход отсутствует — равен нулю. Отрицательный доход, т. е. убытки, мы не учитываем. Тогда оценка предельной стоимости рассматриваемой рискованной инвестиции сводится к суммарной оценке стоимости опционов, имеющих то же распределение доходов, что и рассматриваемый проект в соответствующем году. Для определения стоимости рискованных доходов каждого года в нулевом году воспользуемся формулой определения стоимости опциона со сроком исполнения 1 период и последовательно получим оценку рискованной прибыли периода  $t$  в расчете на период  $t - 1$ , и далее до начального периода. Предельную стоимость рассматриваемой рискованной инвестиции представим как сумму текущей стоимости всех рассмотренных опционов или, что то же самое, как сумму настоящей стоимости распределения доходов за каждый год в течение всего периода исполнения рассматриваемого проекта.

### 3. Экспериментальные расчеты на основе биномиальной модели

Рассмотрим подробнее описанный метод на некотором условном примере.

*Пример 1.* Пусть рассматривается некоторый рискованный проект инвестиций. Суммарные инвестиционные расходы равны 70 млн руб. Период полезного использования проекта составляет четыре года. Известно, что в текущем периоде этот проект принес бы базовый условный доход без учета условно-постоянных расходов в размере 80 млн руб., условно-постоянные расходы в текущем периоде составляли бы 70 млн руб. Темп инфляции составляет 10% в год. Известно, что указанный условный доход может изменяться ежегодно, причем либо он возрастает с темпом роста, равным 1,2, либо с темпом роста 0,9. Безрисковая ставка процента составляет 15%. Следует учесть, что условно-постоянные расходы по проекту будут меняться с учетом темпа инфляции. Ради простоты предполагаем, что темпы инфляции не изменялись в течение всего рассматриваемого периода. Тогда значения этих расходов можно представить с учетом заданного темпа инфляции следующим образом (табл. 1).

Определим теперь рискованные доходы для каждого года в течение периода исполнения проекта (табл. 2). Вначале поясним возможности определения прибыли по данной инвестиции. В соответствии с исходными данными можно за-

Таблица 1

Условно-постоянные расходы по проекту, млн руб.

Показатель	Период			
	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год
Условно-постоянные расходы	77,000	84,700	93,170	102,487

писать  $S = 80$ ,  $X = 70$ ,  $a = 1,2$ ,  $b = 0,9$ ,  $r = 15\%$ ,  $i = 10\%$ . Определим доход в первом году в каждом из двух состояний экономики. Если прибыль возрастала с темпом роста  $a$ , то получим

$$\begin{aligned} \Pi_a(1) &= \max\{(aS - X(1 + i)), 0\} = \max\{(1,2 \cdot 80 - 70(1 + 0,1)), 0\} = \\ &= \max\{96 - 77, 0\} = \max\{19, 0\} = 19. \end{aligned}$$

Во втором состоянии экономики будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_b(1) &= \max\{(bS - X(1 + i)), 0\} = \max\{(0,9 \cdot 80 - 70(1 + 0,1)), 0\} = \\ &= \max\{72 - 77, 0\} = \max\{-5, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, для второго года получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{aa}(2) &= \max\{(aaS - X(1 + i)^2), 0\} = \max\{(1,2^2 \cdot 80 - 70(1 + 0,1)^2), 0\} = \\ &= \max\{115,2 - 84,7, 0\} = \max\{30,5, 0\} = 30,5. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть определены остальные значения прибыли во втором году, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Ожидаемые доходы каждого года, млн руб.

Вариант исхода	Период			
	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год
1				80,803
2				39,331
3				39,331
4				8,227
5			45,07	39,331
6			10,51	8,227
7		30,5	10,51	8,227
8	19,00	1,7	0,00	0,000
9	0,00	1,7	10,51	39,331
10		0,00	0,00	8,227
11			0,00	8,227
12			0,00	0,000
13				8,227
14				0,000
15				0,000
16				0,000

Расчеты доходов третьего года проводятся в соответствии с формулами, представленными на рис. 3. Например, в том случае, когда доход возрастал каждый год с темпом роста, равным  $a$ , получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{aaa}(3) &= \max\{(aaaS - X(1 + i)^3), 0\} = \max\{(1,2^3 \cdot 80 - 70(1 + 0,1)^3), 0\} = \\ &= \max\{138,24 - 93,17, 0\} = \max\{45,07, 0\} = 45,07. \end{aligned}$$

В том случае, когда каждый год в течение трех рассматриваемых лет доход возрастал с темпом роста, равным  $b$ , получим

$$\begin{aligned} \Pi_{bbb}(3) &= \max\{(bbbS - X(1 + i)^3), 0\} = \max\{(0,9^3 \cdot 80 - 70(1 + 0,1)^3), 0\} = \\ &= \max\{588,32 - 93,17, 0\} = \max\{-34,85, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично определяются значения доходов во всех остальных случаях для третьего года.

Расчеты доходов четвертого года проводятся по аналогичным формулам. Следует только учитывать, что базовый условный доход изменяется в данном случае четыре раза, и, соответственно, меняется объем условно-постоянных расходов. Например, для случая, когда базовый доход менялся с темпом роста, равным  $a$ , в течение четырех лет, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_{aaaa}(4) &= \max\{aaaaS - X(1+i)^4, 0\} = \max\{(1,2^4 \cdot 80 - 70(1+0,1)^3), 0\} = \\ &= \max\{165,888 - 85,085, 0\} = \max\{80,803, 0\} = 80,803. \end{aligned}$$

Если вначале базовый условный доход возрастал в течение двух лет с темпом роста  $a$ , а затем два года с темпом роста, равным  $b$ , то в конце четвертого года доход составит:

$$\begin{aligned} \Pi_{aabb}(4) &= \max\{aabbS - X(1+i)^3, 0\} = \max\{(1,2^4 \cdot 0,9^2 \cdot 80 - 70(1+0,1)^4), 0\} = \\ &= \max\{93,312 - 85,085, 0\} = \max\{8,227, 0\} = 8,227. \end{aligned}$$

Аналогично определяются значения дохода при других сочетаниях темпов роста базового дохода.

Рассмотрим теперь доход каждого года как доход по опциону со сроком исполнения один, два, три или четыре года соответственно. Определим стоимость каждого такого опциона на покупку, используя биномиальную модель оценки стоимости опциона со сроком исполнения в соответствующем году.

Для этого вначале определим величину  $q$ , которая рассчитывается по формуле

$$q = \frac{1+r-b}{a-b} = \frac{1+0,15-0,9}{1,2-0,9} = \frac{0,25}{0,3} = 0,833, \quad 1-q = 0,167.$$

Текущую стоимость доходов первого периода по формуле оценки стоимости опциона на покупку со сроком исполнения один период (1) можно определить как

$$C(1) = \frac{1}{1+r} (q\Pi_a(1) + (1-q)\Pi_b(1)) = \frac{1}{1+0,15} (0,833 \cdot 19,0 + 0,167 \cdot 0) = 13,678.$$

Полученное значение характеризует настоящую стоимость рискованного дохода первого года по рассматриваемому проекту.

При анализе доходов второго года обратим внимание на то, что в условиях биномиальной модели возникают четыре значения дохода, которые можно объединить в пары в зависимости от того, какое значение темпа роста базового дохода было достигнуто на предыдущем (первом) подпериоде (см. табл. 1). Для каждой пары таких доходов определим ее стоимость в первом периоде, используя формулы оценки доходов по опциону на покупку со сроком исполнения два периода (3) и (4) соответственно.

Тогда для первой пары доходов получаем

$$\begin{aligned} C_{a(2,1)} &= \frac{1}{1+r} (q\Pi_{aa}(2) + (1-q)\Pi_{ab}(2)) = \\ &= \frac{1}{1+0,15} (0,8333 \cdot 30,50 + 0,1667 \cdot 1,7) = 22,347. \end{aligned}$$

Аналогично для второй пары значений доходов можно определить их оценку на первый период

$$C_{b(2,1)} = \frac{1}{1+r} (q\Pi_{ba}(2) + (1-q)\Pi_{bb}(2)) = \frac{1}{1+0,15} (0,8333 \cdot 1,7 + 0,1667 \cdot 0) = 1,232.$$

Таблица 3

**Определение настоящей стоимости доходов третьего года**

Оценка доходов 3-го года на 0-й год	Оценка доходов 3-го года на 1-й год	Оценка доходов 3-го года на 2-й год	Распределение доходов 3-го года
			45,07
		34,183	10,51
	25,874		10,51
		7,616	0,00
19,549			
		7,616	10,51
	5,519		0,00
		0,000	0,00
			0,00

Полученные значения представляют собой расчетные оценки стоимости доходов второго года в первом году. Рассмотрим эти значения как доходы по опциону на покупку со сроком исполнения один период и определим стоимость этих доходов в нулевом или начальном периодах по формуле (5).

Аналогичным путем, используя формулу определения стоимости опциона на покупку со сроком исполнения, равным одному периоду, можно пересчитать доходы третьего года в оценку соответственно второго, первого и нулевого года, а доходы четвертого года — в оценку третьего, второго первого и нулевого годов. При этом по-прежнему используем формулу оценки стоимости опциона со сроком исполнения, равным одному периоду. Результаты расчетов оценки настоящей стоимости доходов третьего года приведены в табл. 3, а четвертого года — в табл. 4.

Таблица 4

**Определение настоящей стоимости доходов четвертого года**

Оценка доходов 4-го года на 0-й год	Оценка доходов 4-го года на 1-й год	Оценка доходов 4-го года на 2-й год	Оценка доходов 4-го года на 3-й год	Распределение доходов 4-го года
				80,803
			64,253	39,331
		50,863		39,331
			29,693	8,227
	40,101			39,331
			29,693	8,227
		22,380		8,227
			5,961	0,000
31,500				
				39,331
			29,693	8,227
		22,380		8,227
			5,961	0,000
	16,844			8,227
			5,961	0,000
		4,320		0,000
			0,000	0,000

Общая предельная стоимость рассматриваемой рискованной инвестиции определяется в данном случае как сумма оценок текущей стоимости рискованных доходов за каждый год в течение периода исполнения проекта:

$$C = C(1) + C(2) + C(3) + C(4) = 13,768 + 16,373 + 19,549 + 31,500 = 81,189 \text{ млн руб.}$$

В условиях данного примера невыгодно платить за данную инвестицию или, что то же самое, инвестировать в данный проект более 81,2 млн руб. Если учесть, что по условию данного примера инвестиционные расходы по проекту составляют 70 млн руб., то результаты приведенных расчетов показывают, что рассматриваемый проект целесообразно осуществлять.

Подобный подход может быть использован и в том случае, если доходы по проекту возникают не в первом году, как в условиях рассматриваемого примера, а с каким-то запаздыванием, например, во втором году. Это означает, что и в первом году осуществляются только инвестиционные расходы. Предположим, что сумма этих расходов составляет 20 млн руб. Пусть распределение доходов во втором — четвертом годах сохраняется и остаются неизменными остальные параметры рассматриваемого примера. Тогда настоящая стоимость получаемых доходов по проекту составит

$$C = C(2) + C(3) + C(4) = 16,373 + 19,549 + 31,500 = 67,422 \text{ млн руб.}$$

Эта сумма представляет собой предельную стоимость инвестиции в данный проект. Если учесть, что в первом году предстоят только расходы по проекту в сумме 20 млн руб., то объем инвестиционных расходов нулевого года должен быть уменьшен на эту величину. Пересчитаем расходы первого года в эквивалентные расходы нулевого года по той же самой ставке процента. Тогда получим:

$$\frac{I_1}{1+r} = \frac{20}{1,15} = 17,391 \text{ млн руб.}$$

Отсюда предельная сумма инвестиционных расходов по данному проекту в нулевом году составит

$$67,422 - 17,391 = 50,031 \text{ млн руб.}$$

Если объем инвестиционных расходов в нулевом году по данному проекту превышает эту сумму, то следует либо отказаться от исполнения данного проекта, либо переработать основные параметры данного проекта, например, сократить некоторые расходы так, чтобы общая стоимость инвестиции не превышала бы этой суммы.

В условиях данного примера объем инвестиционных расходов составляет 70 млн руб., что превышает предельно допустимый объем инвестиционных расходов почти на 20 млн руб.

Для того чтобы исполнение проекта и при данной сумме инвестиционных расходов было бы целесообразным, можно рассмотреть возможности сокращения исходного значения условно-постоянных расходов или изменения иных параметров, от которых зависит конкретное значение прибыли. Например, если исходную сумму условно-постоянных расходов удастся сократить до 60 млн руб. в год, то, выполнив расчеты, аналогичные представленным выше, можно показать, что общая настоящая стоимость будущей рискованной прибыли составит

$$C = C(2) + C(3) + C(4) = 25,268 + 27,652 + 38,337 = 91,257 \text{ млн руб.}$$

Если при этом учесть расходы первого года, пересчитанные на нулевой год, то получим, что предельный объем инвестиционных расходов составит 91,257 —

– 17,391 = 73,866 млн руб., что превышает запланированную сумму инвестиционных расходов в объеме 70 млн руб. В этом случае также целесообразно осуществление данного проекта.

Преобразуем условия данного периода следующим образом. Будем считать, что изменения доходов в соответствии с указанными данными происходят каждый квартал. Это приводит к тому, что используемая в расчетах ставка процента должна быть определена в расчете на квартал. С учетом того, что в году четыре квартала, расчетное значение квартальной ставки процента составит

$$r_4 = \frac{0,15}{4} = 0,0375, \text{ или } 3,75\%.$$

Изменение ставки процента не приводит к изменению значений доходов в каждом подпериоде, поскольку ее значения не зависят от ставки процента. Все значения доходов сохранятся на уровне данных, приведенных в табл. 2, для каждого года, но только следует иметь в виду, что эти данные в условиях рассматриваемого примера относятся к каждому кварталу. Изменение ставки процента меняет величину  $q$  и  $1 - q$ , которые в данном случае определяются так:

$$q = \frac{1+r-b}{a-b} = \frac{1+0,0375-0,9}{1,2-0,9} = \frac{1,0375}{0,3} = 0,4583, \quad 1-q = 0,5467.$$

Используя эти данные, определим настоящую стоимость доходов каждого квартала.

Так, для первого квартала будем иметь

$$\begin{aligned} C(1) &= \frac{1}{1+r_4} (q\Pi_a(1) + (1-q)\Pi_b(1)) = \\ &= \frac{1}{1+0,0375} (0,4583 \cdot 19,0 + 0,5417 \cdot 0) = 8,393. \end{aligned}$$

Определим вначале оценку доходов второго квартала в первом квартале.

Тогда для первой пары значений доходов получаем

$$\begin{aligned} C_a(2, 1) &= \frac{1}{1+r_4} (q\Pi_{aa}(2) + (1-q)\Pi_{ab}(2)) = \\ &= \frac{1}{1+0,0375} (0,4583 \cdot 30,50 + 0,5417 \cdot 1,7) = 14,361. \end{aligned}$$

Аналогично для второй пары значений доходов имеем

$$\begin{aligned} C_b(2, 1) &= \frac{1}{1+r_4} (q\Pi_{ba}(2) + (1-q)\Pi_{bb}(2)) = \\ &= \frac{1}{1+0,0375} (0,4583 \cdot 30,50 + 0,5417 \cdot 0) = 0,751. \end{aligned}$$

Учитывая полученные данные, можно определить настоящую стоимость рисковой доходов второго периода следующим образом:

$$\begin{aligned} C(2) &= \frac{1}{1+r_4} (qC_a(2, 1) + (1-q)C_b(2, 1)) = \\ &= \frac{1}{1+0,0375} (0,4583 \cdot 14,351 + 0,5417 \cdot 0,751) = 6,737. \end{aligned}$$

Аналогичным путем, используя формулу оценки стоимости опциона на покупку с единичным периодом исполнения, можно показать, что настоящая сто-

имость доходов третьего квартала составляет  $C(3) = 7,098$ , а доходов четвертого квартала —  $C(4) = 12,785$ .

Настоящая стоимость рисковых доходов всех четырех кварталов составляет

$$C = C(1) + C(2) + C(3) + C(4) = 8,394 + 6,737 + 7,098 + 12,785 = 35,013 \text{ млн руб.}$$

Если считать, что объем инвестиций начального года сохранился на уровне 70 млн руб., то при этом осуществлять подобную инвестицию со сроком исполнения один год становится совершенно невыгодно. В данном случае также можно рассмотреть возможности сокращения начального объема условно-переменных расходов. Так, если удастся снизить условно-постоянные расходы нулевого года до 57,11 млн руб., то настоящая стоимость рисковой прибыли каждого квартала составит для доходов первого квартала 19,450 млн руб., для второго — 16,975 млн руб., третьего — 14,242 млн руб., четвертого — 21,345 млн руб. Предельная стоимость рассматриваемой рискованной инвестиции составит в данном случае

$$C = 19,450 + 16,975 + 14,242 + 21,345 = 72,012 \text{ млн руб.}$$

Осуществление инвестиции становится целесообразным.

Представленный в данной статье метод определения предельной настоящей стоимости многопериодной рискованной инвестиции может быть использован для оценки стоимости проектов при различной его длительности. Например, при оценке предельной стоимости участка земли под будущую застройку, при определении стоимости индивидуальных срочных контрактов и т. п., при дополнительном предположении об относительной длительности срока исполнения соответствующих проектов. Кроме того, могут быть учтены условия изменения темпов роста цены, доходов и других подобных показателей при анализе будущих состояний в различные периоды времени. В этом случае не выполняются условия формулы Кокса — Росса — Рубинштейна (12). Однако описанный выше метод оценки настоящей стоимости многопериодной рискованной инвестиции, который опирается на раздельную оценку доходов или иного полезного результата от инвестирования и предполагает использование только однопериодных эквивалентных портфелей, может быть использован и в этом случае.

Предположим ради простоты, что в условиях исходного примера рассматривается проект с периодом использования, равным двум полугодиям. Предположим, что базовый условный доход в первом полугодии изменяется с темпом роста  $a$  в одном состоянии экономики и темпом роста  $b$  в другом. Во втором полугодии эти темпы меняются, и, соответственно, в одном состоянии экономи-

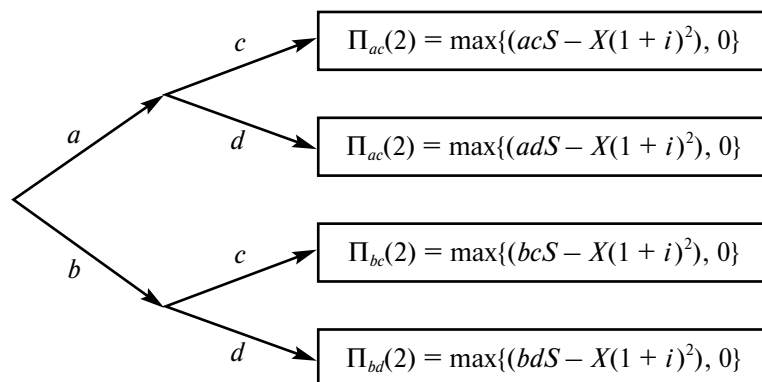


Рис. 4. Различные темпы роста доходов по периодам

ки темп роста прибыли составит  $c$ , а в другом —  $d$ . Это приведет к различным оценкам доходов в каждом будущем состоянии экономики. Формулы определения доходов в каждом будущем состоянии экономики в конце второго квартала приведены на рис. 4. Такая ситуация возможна, например, в том случае, если спрос на рассматриваемый товар носит сезонный характер. При этом предполагаем, что спрос сохраняется в течение каждого сезона, товар не уходит с рынка полностью, но колебания цен в течение каждого сезона будут различны. Поясним особенности расчетов настоящей стоимости рисковых доходов в данном случае на следующем примере.

*Пример 2.* Пусть рассматривается некоторый рисковый проект инвестиций. Инвестиционные расходы равны 50 млн руб. Период полезного использования проекта составляет один год. Колебания спроса на выпускаемый товар различаются в течение осенне-зимнего и весенне-летнего сезонов. Известно, что в текущем периоде этот проект принес бы прибыль без учета условно-постоянных расходов 40 млн руб., условно-постоянные расходы в текущем периоде составляли бы 30 млн руб. Темп инфляции составляет 8% в год, т. е. 4% в полугодие. Известно, что указанная часть прибыли может изменяться каждое полугодие, причем она возрастает с темпом роста, равным 1,2, либо с темпом роста 0,9 в весенне-летний сезон, в осенне-зимний сезон эти темпы роста равны 1,1 и 0,7 соответственно в каждом из двух состояний экономики. Безрисковая ставка процента составляет 12% годовых, т. е. 6% в полугодие. Значения доходов по полугодиям в зависимости от будущего состояния экономики приведены на рис. 5.

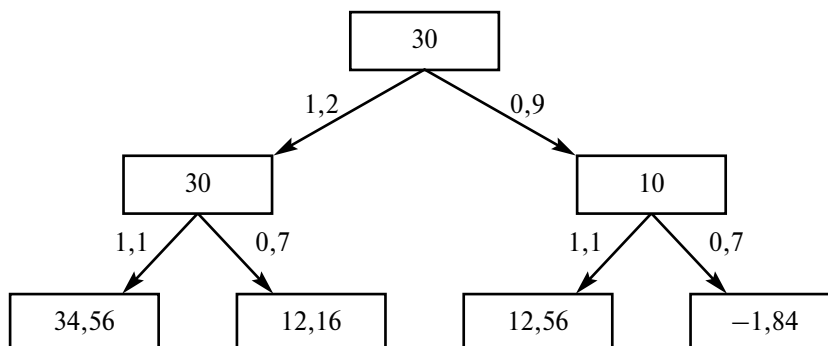


Рис. 5. Инвестиционные расходы по проекту и доходы в первом и втором полугодиях

Определим вначале значения параметра  $q$ , которые в нашем случае будут различны по полугодиям. Для первого полугодия обозначим его  $q_1$  и соответственно для второго полугодия  $q_2$ . Тогда получим

$$q_1 = \frac{1+r-b}{a-b} = \frac{1+0,06-0,9}{1,2-0,9} = \frac{0,16}{0,3} = 0,533, \quad 1-q = 0,467.$$

Для второго полугодия введем обозначения  $q_2$  и  $1-q_2$ . Тогда имеем

$$q_2 = \frac{1+r-d}{c-d} = \frac{1+0,06-0,7}{1,1-0,7} = \frac{0,36}{0,4} = 0,9, \quad 1-q = 0,1.$$

Рассчитаем вначале настоящую стоимость доходов первого полугодия

$$\begin{aligned} C(1, 0) &= \frac{1}{1+r} (q_{11}\Pi_a(1) + (1-q_{11})\Pi_b(1)) = \\ &= \frac{1}{1+0,06} (0,533 \cdot 30 + 0,467 \cdot 10) = 15,472. \end{aligned}$$



Определим теперь настоящую стоимость рисковых доходов второго полугодия. Для этого найдем вначале стоимость доходов второго полугодия в первом полугодии. В соответствии с данными, приведенными на рис. 5, можем отметить четыре значения доходов во втором полугодии рассматриваемого года. Найдем стоимость первой пары значений доходов. В соответствии с формулой оценки стоимости опциона, имеющего только один период до исполнения, получим

$$\begin{aligned} C_a(2, 1) &= \frac{1}{1+r} (q_2\Pi_{aa}(2) + (1-q_2)\Pi_{ab}(2)) = \\ &= \frac{1}{1+0,06} (0,9 \cdot 34,56 + 0,1 \cdot 12,16) = 30,491. \end{aligned}$$

Соответственно, для второй пары значений доходов получаем

$$\begin{aligned} C_b(2, 1) &= \frac{1}{1+r} (q_2\Pi_{ba}(2) + (1-q_2)\Pi_{bb}(2)) = \\ &= \frac{1}{1+0,06} (0,9 \cdot 12,56 + 0,1 \cdot (-1,84)) = 10,491. \end{aligned}$$

Найдем теперь стоимость полученных доходов в нулевом году

$$\begin{aligned} C(2, 0) &= \frac{1}{1+r} (q_1 C_a(2, 1) + (1-q_1) C_b(2, 1)) = \\ &= \frac{1}{1+0,06} (0,32 \cdot 30,491 + 0,68 \cdot 10,491) = 15,935. \end{aligned}$$

Настоящую стоимость будущих доходов определим как сумму полученных оценок доходов первого и второго годов

$$C(2) = C(1, 0) + C(2, 0) = 15,472 + 15,935 = 31,407 \text{ млн руб.}$$

Если сопоставить полученную оценку настоящей стоимости будущих доходов и сумму инвестиционных расходов, которая составляет 30 млн руб., то очевидно, что настоящая стоимость будущих доходов по проекту превышает инвестиционные расходы на 1,407 млн руб. Поэтому данный рисковый проект можно рекомендовать к исполнению.

Определенные проблемы применения указанного метода связаны с учетом отрицательных доходов в те или иные периоды. С формальной точки зрения их также можно учесть в формулах вида (1), (5) или (6). Фактически отрицательный доход означает убытки, которые могут привести к прекращению бизнеса и невозможности получения доходов в последующие периоды. Это послужит предметом нашего дальнейшего исследования.

Представленные методы оценки рисковых инвестиций показывают, что в условиях многопериодных инвестиций можно использовать для оценки инвестиций и стоимости рискового капитала подход, основанный на формировании эквивалентных портфелей и применении биномиальной модели. Основное преимущество состоит в том, что соответствующий ответ может быть получен без учета вероятностей наступления будущих состояний экономики. Однако его использование предполагает, что могут быть сформированы или хотя бы оценены портфели активов, которые приносят в каждом рассматриваемом периоде такие же рисковые доходы, которые обеспечивает анализируемый инвестиционный проект.

**Источники**

- Бартонеш М., Найт Р.* Управление денежными потоками. СПб., 2004.
- Бирман Г., Шмидт С.* Капиталовложения. Экономический анализ инвестиционных проектов. М., 2003.
- Бригхем Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент. Полный курс: в 2 т. СПб., 1997. Т. 1.
- Валдайцев С. В.* Оценка бизнеса и управление стоимостью предприятия. М., 2001.
- Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М., 2008.
- Воронцовский А. В.* Управление рисками. 3-е изд., испр. и доп. СПб., 2005.
- Коупленд Т., Мурин Дж.* Стоимость компании: оценка и управление. М., 1999.
- Люю Ю.-Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики. М., 2007.
- Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. М., 2001.
- Оценка бизнеса / под ред. А. Г. Грязновой, М. А. Федотовой. 2-е изд., перераб. и доп. М., 2005.
- Фабоцци Ф.* Управление инвестициями. М., 2000.
- Халл Дж.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. 6-е изд. М., 2007.
- Abel A.* Optimal Investment under Uncertainty // *American Economic Review*. 1983. Vol. 73. N 1. P. 228—233.
- Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M.* Option Pricing: A Simplified Approach // *Journal of Financial Economics*. September. 1979. P. 229—263.
- Cox J. C., Rubinstein M.* Options markets. Englewood Cliffs. New Jersey, 1985.
- Debreu G.* Theory of Value. New Haven, Conn: Yale University Press, 1959.
- Deutsch H.-P.* Derivate und Interne Modelle. Modernes Risikomanagement. 2. ueberarb. und erw. Aufl. Stuttgart, 2001.
- Gould J. P.* Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm // *Review of Economic Studies*. 1968. Vol. 35. P. 47—56.
- Mueller-Moehl E.* Optionen und Futures. Grundlagen und Strategien fuer das Termingeschaef in Deutschland, Oesterreich und in der Schwiez. 5. ueberarb. und aktual. Aufl. Stuttgart, 2001.
- Lucas R. E.* Adjustment Costs and the Theory of Supply // *Journal of Political Economy*. 1967. Vol. 75. P. 321—334.
- Lucas R. E.* Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator // *International Economic Review*. 1967. Vol. 8. P. 78—85.
- Pindyck P.* Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm // *American Economic Review*. 1988. Vol. 78. N 5. P. 969—985.
- Treadway A.* On Rational Entrepreneurial Behaviour and the Demand for Investment // *The Review of Economic Studies*. 1969. Vol. 36. N 2. P. 227—239.