А. Б. Лебедев[1]

канд. экон. наук, доцент кафедры экономической теории и экономической политики Санкт-Петербургского государственного университета

М. В. Соколов[2]

канд. экон. наук, старший преподаватель кафедры статистики и эконометрики Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

Введение

По мнению многих авторов (см., напр.: Диагностика социальной напряженности..., 2002; The crime drop in America, 2006), уровень доходов населения, а также степень их дифференциации являются одними из детерминантов социальной напряженности в обществе. Так, в работе (Levitt, Dubner, 2005, p. 117–144) сокращение числа преступлений в США в начале 1990-х гг. связывается со снижением рождаемости у необеспеченных матерей (из-за легализации абортов в 1973 г.), тем самым, на наш взгляд, подтверждая связь между доходами и антисоциальным поведением. Однако на психологическое состояние респондентов (как один из определяющих факторов социальной напряженности), по-видимому, оказывают влияние не только текущий уровень благосостояния, но и ожидания относительно этого уровня в ближайшем будущем. Иначе говоря, индивиду важно быть уверенным, что и в будущем его благосостояние останется на уровне, достаточном для удовлетворения собственных потребностей. Так, увеличение степени неопределенности в отношении размеров будущих доходов (вызванное, например, надвигающимися рецессионными явлениями в экономике), по нашему мнению, при прочих равных условиях должно приводить к росту социальной напряженности в обществе, и наоборот. Косвенно это подтверждается, например, увеличением числа так называемых малозначительных преступлений (petty crimes) — краж в супермаркетах, мелких страховых мошенничеств, краж топлива на автозаправках и т. п. — в преддверии рецессионных явлений, вызванных финансовым кризисом (Hughes, 2008; Кириллов, 2008).

Наличие такой взаимосвязи делает актуальной задачу измерения волатильности доходов населения, понимаемой как слабая «предсказуемость» (прогнозируемость) размеров будущих доходов. Для построения искомого показателя волатильности можно было бы воспользоваться результатами, полученными в смежной и достаточно глубоко разработанной области — измерении экономического неравенства (см., напр.: Шевяков, Кирута, 2002; Cowell, 2007). Однако, на наш взгляд,

[1] Эл. адрес: a.lebedev@econ.pu.ru
[2] Эл. адрес: sos-homepage@yandex.ru

в данном случае несколько более уместна вероятностная интерпретация задачи, что роднит ее с проблемами, рассматриваемыми в рамках теории измерения риска (см., например, обзорные работы (Pedersen, Satchell, 1999; Pflug, 1999)).

В статье предпринята попытка ввести индекс, позволяющий упорядочить домашние хозяйства по уровню волатильности реальных располагаемых денежных доходов (далее — *доходов*). Для его построения использованы элементы аксиоматического подхода, предложенного в работе (Pollatsek, Tversky, 1970), посвященной проблеме восприятия риска человеком. Функциональный вид полученного индекса — мультипликативная свертка математического ожидания и дисперсии совокупных *доходов* домашнего хозяйства — безусловно, хорошо известен. Например, его частные случаи — дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации, отношение дисперсии к математическому ожиданию — используются (хотя и применительно к другой случайной величине — располагаемому доходу случайно выбранного человека) для измерения неравенства в доходах (см., напр.: Kolm, 1976a; Kolm, 1976b). Мы лишь предложим одну из возможных характеризаций этого индекса применительно к рассматриваемой задаче, приведем эвристические соображения относительно его статистической оценки и пример расчета.

Используемые обозначения и необходимые определения

Пусть R_+, $\overline{R}_+$, R — множества положительных, неотрицательных и всех действительных чисел соответственно.

Рассмотрим множество $\widetilde{V}_+$ всех случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, с положительными первыми и конечными вторыми моментами. Математическое ожидание, дисперсию и коэффициент вариации случайной величины $\widetilde{x} \in \widetilde{V}_+$ обозначим через $\mathbf{E}\widetilde{x}$, $\mathbf{D}\widetilde{x}$ и $\mathrm{var}[\widetilde{x}] = \sqrt{\mathbf{D}\widetilde{x}}/\mathbf{E}\widetilde{x}$ соответственно. Для вырожденной случайной величины в точке $x \in R_+$ введем специальное обозначение — $x_{\text{п.н}}$. Распределение случайной величины $\widetilde{x}$ обозначим за $P_{\widetilde{x}}$. Любой элемент множества $\widetilde{V}_+$ будем интерпретировать как случайный *доход* домашнего хозяйства за некоторый период.

Сужение множества $\widetilde{V}_+$ до множества нормально распределенных случайных величин с положительным математическим ожиданием обозначим за $\widetilde{N}_+$. Вырожденную случайную величину $x_{\text{п.н}}$ будем также интерпретировать как нормально распределенную с математическим ожиданием x и нулевой дисперсией.

Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{V}_+$, n — натуральное число. Случайный вектор $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$ (компоненты которого заданы на том же вероятностном пространстве, что и $\widetilde{x}$) называется *размещением случайного дохода* $\widetilde{x}$ (Landsberger, Meilijson, 1994), если $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i = \widetilde{x}$ с вероятностью 1.

i-ю компоненту $\widetilde{x}_i$ размещения $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$ будем интерпретировать как случайный доход, полученный i-м членом домашнего хозяйства, состоящего из n человек. Множество всех возможных размещений случайных доходов из множества $\widetilde{V}_+$ (при всех натуральных n) обозначим за $\widetilde{\mathbf{V}}_+$.

Если допустить, что случайные объемы доходов различных домашних хозяйств независимы, то возможность их упорядочивания по уровню волатильности естественно отождествлять с предположением о том, что на множестве $\widetilde{V}_+$ задано некоторое полное транзитивное бинарное отношение $(\succeq, \widetilde{V}_+)$.

Продолжение $(\succeq, \widetilde{\mathbf{V}}_+)$ отношения $(\succeq, \widetilde{V}_+)$ на множество $\widetilde{\mathbf{V}}_+$, построенное по правилу $\widetilde{\boldsymbol{x}} \succeq \widetilde{\boldsymbol{y}}$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \widetilde{\mathbf{V}}_+$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_i \widetilde{x}_i \succeq \sum_i \widetilde{y}_i, \tag{1}$$

назовем *отношением сравнительной волатильности доходов*. Рефлексивную (отношение идентичности домашних хозяйств по уровню волатильности доходов) и иррефлексивную (отношение строго более высокой волатильности доходов) части $\succeq$ обозначим через $\sim$ и $\succ$ соответственно.

Целесообразность предположения (1) вытекает из следующих соображений. В большинстве случаев доход отдельного члена домашнего хозяйства нельзя считать объективной величиной. Типичным примером здесь может служить семейный бизнес, где декларируемые доходы отдельных членов семьи не всегда отражают истинные размеры дохода за счет возможного перераспределения доходов внутри семьи (см., напр.: Глухов, 2007). Соотношение (1) позволяет элиминировать влияние эффекта перераспределения доходов между членами домашнего хозяйства. Из (1) также следует симметричность (анонимность) отношения $\succeq$: $(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n) \sim (\widetilde{x}_{i_1}, ..., \widetilde{x}_{i_n})$ для любой перестановки $i_1, ..., i_n$ чисел $1, ..., n$.

Как уже упоминалось, под волатильностью доходов понимается слабая «предсказуемость» (прогнозируемость) размеров будущих доходов домашних хозяйств. Мы затрудняемся дать более четкое определение понятия волатильности доходов, но перечислим требования, которым, как нам кажется, может удовлетворять порождаемое этим понятием отношение $(\succeq, \widetilde{\mathbf{V}}_+)$. Отметим, что такой подход к измерению не определенных явно характеристик достаточно широко практикуется в научных областях, объекты исследования которых трудно поддаются математической формализации (например, в психофизике и математической психологии (Falmagne, 1985)).

Предполагаемые свойства отношения сравнительной волатильности доходов

На практике удается эффективно различать лишь распределения случайных величин, но не сами случайные величины. Поэтому, претендуя на практическое использование полученных ниже результатов, мы предположим, что для любых $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{V}_+$

(i) $P_{\widetilde{x}} = P_{\widetilde{y}}$ влечет $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$.

Иными словами, $(\succeq, \widetilde{V}_+)$ порождает аналогичное бинарное отношение на соответствующем множестве вероятностных распределений. Соотношение (i) позволяет нам в дальнейшем, там где это не вызывает недоразумений, отождествлять случайную величину $\widetilde{x}$ и ее распределение $P_{\widetilde{x}}$.

В соответствии с интуитивным представлением о волатильности доходов естественно потребовать, чтобы любой случайный доход был волатильнее вырожденного (неслучайного):

(ii) $\widetilde{x} \succeq y_{\text{п.н}}$ для любых невырожденной случайной величины $\widetilde{x} \in \widetilde{V}_+$ и числа $y \in R_+$[1].

Данное условие согласуется с общими требованиями, накладываемыми на произвольную меру разброса случайной величины (Bickel, Lehmann, 1976).

---

[1] Отметим, что все полученные ниже выводы сохранятся, если требование (ii) заменить предположением о том, что увеличение вариации (степени рассеивания, разброса) доходов домашнего хозяйства вокруг среднего значения ведет к росту волатильности доходов:

(ii)′ $\alpha(\widetilde{x} - \mathbf{E}\widetilde{x}) + \mathbf{E}\widetilde{x} \succ \widetilde{x}$ для любых невырожденного случайного дохода $\widetilde{x} \in \widetilde{V}_+$ и числа $\alpha > 1$.

Рассмотрим два домашних хозяйства, состоящих из членов, каждое с независимыми одинаково распределенными случайными доходами $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ и $\tilde{\boldsymbol{y}} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$ соответственно. Естественно ожидать, что доходы первого домашнего хозяйства волатильнее доходов второго тогда и только тогда, когда случайный доход $\tilde{x}_1$ волатильнее случайного дохода $\tilde{y}_1$:

(iii) $\tilde{x} \succeq \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \succeq (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$ для любого натурального n, где $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n$ — независимые копии случайных величин $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ соответственно.

Отметим, что аналог данного требования довольно часто используется при аксиоматическом построении индексов экономического неравенства (см., напр.: Ebert, 1988).

Следующее требование носит технический характер и постулирует тот факт, что малые изменения распределений случайных доходов домашних хозяйств не должны приводить к значительным изменениям в упорядочивании их по уровню волатильности доходов:

(iv) если последовательность случайных величин $\tilde{x}^{(k)} \in \tilde{V}_+$, $k = 1, 2, ...$ сходится по распределению к случайной величине $\tilde{x} \in \tilde{V}_+$, а последовательность $\tilde{y}^{(k)} \in \tilde{V}_+$, $k = 1, 2, ...$ — к $\tilde{y} \in \tilde{V}_+$, причем $\tilde{x}^{(k)} \succeq \tilde{y}^{(k)}$ для всех k, то $\tilde{x} \succeq \tilde{y}$.

Очевидно, доход домашнего хозяйства измеряется по шкале отношений. При этом выбор единицы измерения дохода (например, рубль, тысяча рублей, евро, доллар США), вообще говоря, произволен и обычно определяется лишь соображениями удобства. Естественно потребовать, чтобы упорядочивание домашних хозяйств по уровню волатильности доходов не зависело от этого выбора:

(v) $\tilde{x} \succeq \tilde{y}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{V}_+$ влечет $\alpha\tilde{x} \succeq \alpha\tilde{y}$ для любого $\alpha > 0$.

Аналог данного требования также довольно типичен при аксиоматическом построении индексов экономического неравенства (см., напр.: Ebert, 1988).

Наконец, мы также дополнительно предположим, что изменение вариации (степени рассеивания, разброса) доходов домашнего хозяйства вокруг среднего значения не влияет на упорядочивание домашних хозяйств по уровню волатильности доходов:

(vi) $\tilde{x} \succeq \tilde{y}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathrm{V}}_+$ влечет $\alpha(\tilde{x} - \mathbf{E}\tilde{x}) + \mathbf{E}\tilde{x} \succeq \alpha(\tilde{y} - \mathbf{E}\tilde{y}) + \mathbf{E}\tilde{y}$ для любого $\alpha > 0$.

Нетрудно убедиться, что требования (i)—(v) независимы, т. е. любые четыре из них не влекут пятое. К сожалению, нам не удалось установить независимость всей совокупности требований (i)—(vi).

В следующем разделе показано, что системе требований (i)—(vi) соответствует единственное однопараметрическое семейство отношений сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств.

Основной результат

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение о представлении отношения сравнительной волатильности доходов населения, имеющих нормальное распределение.

Предложение 1

Пусть отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\succeq, \tilde{\mathbf{V}}_+)$ удовлетворяет требованиям (i)—(v), тогда найдется константа c, такая, что для любых $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{N}_+$

$$\tilde{x} \succeq \tilde{y} \Leftrightarrow (\mathbf{E}\tilde{x})^c \mathbf{D}\tilde{x} \ge (\mathbf{E}\tilde{y})^c \mathbf{D}\tilde{y}. \qquad (2)$$

Доказательство

Из (1) следует, что

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} \sim \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \tag{3}$$

для любого $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathbf{V}}_+$.

Поскольку одномерное нормальное распределение полностью характеризуется двумя параметрами — математическим ожиданием и дисперсией, то в силу (i) отношение $\succeq$ порождает некоторое полное транзитивное бинарное отношение $\succeq'$ на множестве $R_+ \times \overline{R}_+$ по правилу:

$$\widetilde{x} \succeq \widetilde{y},\ \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \widetilde{N}_+ \text{ тогда и только тогда, когда } (\mathbf{E}\widetilde{x}, \mathbf{D}\widetilde{x}) \succeq' (\mathbf{E}\widetilde{y}, \mathbf{D}\widetilde{y}).$$

Из (iv) следует (Debreu, 1954), что существует непрерывная функция U: $R_+ \times \overline{R}_+ \to R$ (определенная с точностью до строго монотонно возрастающего непрерывного преобразования), такая, что для любых двух пар чисел (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in R_+ \times \overline{R}_+$

$$(x_1, x_2) \succeq' (y_1, y_2) \text{ тогда и только тогда, когда } U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2).$$

В силу (iii) и (3),

$$U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2) \Leftrightarrow U(nx_1, nx_2) \geq U(ny_1, ny_2) \Leftrightarrow U(x_1/m, x_2/m) \geq U(y_1/m, y_2/m)$$

для любых натуральных n и m. Таким образом,

$$U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2) \text{ влечет } U(\alpha x_1, \alpha x_2) \geq U(\alpha y_1, \alpha y_2) \tag{4}$$

для любого положительного рационального α.

Поскольку множество положительных рациональных чисел образует всюду плотное подмножество R_+, то в силу непрерывности U (4) справедливо также для любого $\alpha \in R_+$.

Согласно (v)

$$U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2) \text{ влечет } U(\alpha x_1, \alpha^2 x_2) \geq U(\alpha y_1, \alpha^2 y_2) \tag{5}$$

для любого $\alpha \in R_+$.

Объединяя (4) и (5), имеем:

$$U(x_1, x_2) \geq U(y_1, y_2) \text{ влечет } U(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) \geq U(\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2) \tag{6}$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in R_+$.

Общий вид непрерывной функции U, определенной на множестве R_+^2 и удовлетворяющей соотношению (6), получен в работе (Aczél,1990, p. 32—33):

$$U(x_1, x_2) = u(x_1^{c_1} x_2^{c_2}),\ x_1, x_2 \in R_+,$$

где u: $R_+ \to R$ — некоторая строго монотонная непрерывная функция, c_1, c_2 — константы.

Поскольку функция U определена с точностью до строго монотонно возрастающего непрерывного преобразования, не умаляя общности, можно положить

$$U(x_1, x_2) = c_3 x_1^{c_1} x_2^{c_2},\ x_1, x_2 \in R_+, \tag{7}$$

где $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$, $c_3 \in \{-1, 1\}$ — некоторые константы.

Функция (7) допускает единственное непрерывное продолжение на множество $R_+ \times \overline{R}_+$. В силу (ii) $c_2 = c_3 = 1$.

Очевидно, бинарное отношение на $\widetilde{N}_+$, порождаемое правилом (2), удовлетворяет требованиям (i)—(v). ■

Используя Предложение 1, получаем основной результат данного раздела.

Утверждение 1

Отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\succeq, \widetilde{\mathbf{V}}_+)$ удовлетворяет требованиям (i)—(vi) тогда и только тогда, когда найдется константа c, такая, что для любых $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \widetilde{\mathbf{V}}_+$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} \succeq \widetilde{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow (\mathbf{E}\widetilde{x})^c \mathbf{D}\widetilde{x} \geq (\mathbf{E}\widetilde{y})^c \mathbf{D}\widetilde{y}, \tag{8}$$

где $\widetilde{x} = \sum\limits_i \widetilde{x}_i$, $\widetilde{y} = \sum\limits_i \widetilde{y}_i$.

Доказательство

В силу соотношения (3) достаточно ограничиться рассмотрением отношения $\succeq$ на множестве $\widetilde{V}_+$. Согласно Предложению 1 найдется константа c, такая, что для любых $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{N}_+$ справедливо (2). В частности,

$$x_{\text{п.н}} \sim y_{\text{п.н}} \tag{9}$$

для любых $x, y \in R_+$.

Рассмотрим две случайные величины

$$\widetilde{x}_1 \succeq \widetilde{y}_1,\ \widetilde{x}_1,\ \widetilde{y}_1 \in \widetilde{V}_+ \tag{10}$$

и определим две последовательности

$$\widetilde{x}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i - k\mathbf{E}\widetilde{x}_1\right) + \mathbf{E}\widetilde{x}_1,\ \widetilde{y}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sum_{i=1}^{k} \widetilde{y}_i - k\mathbf{E}\widetilde{y}_1\right) + \mathbf{E}\widetilde{y}_1,\ k = 1, 2, ...,$$

где $\widetilde{x}_k$, $k = 1, 2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\widetilde{y}_k$, $k = 1, 2, ...$ — также независимые одинаково распределенные случайные величины.

В силу (10), (iii), (1), (v) и (vi)

$$\widetilde{x}^{(k)} \succeq \widetilde{y}^{(k)} \text{ для любого } k = 1, 2, ... \tag{11}$$

Согласно центральной предельной теореме при $k \to \infty$ последовательности $\widetilde{x}^{(k)}$, $\widetilde{y}^{(k)}$ сходятся по распределению к нормально распределенным случайным величинам $\widetilde{x}^*$, $\widetilde{y}^*$ с параметрами $(\mathbf{E}\widetilde{x}_1, \mathbf{D}\widetilde{x}_1)$ и $(\mathbf{E}\widetilde{y}_1, \mathbf{D}\widetilde{y}_1)$ соответственно. Соотношение (11) и требование (iv) влекут

$$\widetilde{x}^* \succeq \widetilde{y}^*,$$

откуда в соответствии с (2) следует $(\mathbf{E}\widetilde{x}_1)^c \mathbf{D}\widetilde{x}_1 \geq (\mathbf{E}\widetilde{y}_1)^c \mathbf{D}\widetilde{y}_1$. Таким образом,

$$\widetilde{x} \succeq \widetilde{y},\ \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{V}}_+ \text{ влечет } (\mathbf{E}\widetilde{x})^c \mathbf{D}\widetilde{x} \geq (\mathbf{E}\widetilde{y})^c \mathbf{D}\widetilde{y}. \tag{12}$$

Для доказательства импликации, обратной (12), заметим, что

$$(\mathbf{E}\widetilde{x})^c \mathbf{D}\widetilde{x} \geq (\mathbf{E}\widetilde{y})^c \mathbf{D}\widetilde{y},\ \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \widetilde{V}_+ \text{ влечет } \widetilde{x} \succeq \widetilde{y}. \tag{13}$$

Остается доказать, что $(\mathbf{E}\widetilde{x})^c\mathbf{D}\widetilde{x} \geq (\mathbf{E}\widetilde{y})^c\mathbf{D}\widetilde{y}$ влечет $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$. Предположим противное. Пусть $(\mathbf{E}\widetilde{x})^c\mathbf{D}\widetilde{x} = (\mathbf{E}\widetilde{y})^c\mathbf{D}\widetilde{y}$, но $\widetilde{x} \succ \widetilde{y}$. Тогда в силу (9) $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ невырождены. Обозначим $z = \mathbf{E}\widetilde{x}$. Согласно (ii)

$$\widetilde{x} \succ \widetilde{y} \succ z_{\text{п.н}}. \tag{14}$$

Из (14) и (iv) следует (Herstein, Milnor, 1953, p. 293), что найдется константа $\alpha \in (0, 1)$, такая, что

$$P_{\widetilde{y}} \sim \alpha P_{\widetilde{x}} + (1 - \alpha)P_{z_{\text{п.н}}}. \tag{15}$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону $\alpha P_{\widetilde{x}} + (1 - \alpha)P_{z_{\text{п.н}}}$, равно $\mathbf{E}\widetilde{x}$, дисперсия — $\alpha\mathbf{D}\widetilde{x} < \mathbf{D}\widetilde{x}$. Следовательно, согласно (13)

$$P_{\widetilde{y}} \succ \alpha P_{\widetilde{x}} + (1 - \alpha)P_{z_{\text{п.н}}},$$

что противоречит (15). Установленное противоречие доказывает, что

$$\widetilde{x} \succeq \widetilde{y},\ \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{V}}_+ \text{ тогда и только тогда, когда } (\mathbf{E}\widetilde{x})^c\mathbf{D}\widetilde{x} \geq (\mathbf{E}\widetilde{y})^c\mathbf{D}\widetilde{y}.$$

Очевидно, бинарное отношение на $\widetilde{\mathbf{V}}_+$, порождаемое правилом (8), удовлетворяет требованиям (i)—(vi). ■

Итак, число

$$\mathbf{I}_c[\widetilde{\boldsymbol{x}}] = \mathbf{I}_c[\widetilde{x}] = (\mathbf{E}\widetilde{x})^c\mathbf{D}\widetilde{x}, \text{ где } \widetilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i, \tag{16}$$

представляющее собой мультипликативную свертку математического ожидания и дисперсии совокупных доходов домашнего хозяйства, при определенных условиях может служить искомым индексом сравнительной волатильности доходов.

Нетрудно убедиться, что порождаемое индексом $\mathbf{I}_c$ отношение сравнительной волатильности доходов (8) согласовано с отношениями стохастического доминирования, обычно используемыми для измерения риска, сопряженного с получением случайного дохода/убытка (Rothschild, Stiglitz, 1970). Проводя дальнейшую аналогию с измерением риска, отметим, что эмпирические исследования (см., например, (Coombs, Lehner, 1981)) выявляют снижение восприятия риска с увеличением математического ожидания случайного дохода. Последнее указывает на целесообразность выбора константы в формуле (16) неположительной.

Отметим также, что требования (i)—(vi) сохраняют свою экономическую интерпретацию и применительно к измерению волатильности доходов в более общих социальных подсистемах, чем домашнее хозяйство. Необходимым условием здесь остается лишь наличие перераспределения доходов в такой подсистеме (в противном случае соотношение (1) теряет интерпретацию). Однако указанное перераспределение доходов — например, от богатых к бедным — имеет место (хотя и в меньшей степени) и в таких подсистемах, как город, регион, субъект федерации, страна. Приведенные рассуждения, в частности, дают основания для использования индекса $\mathbf{I}_c$ применительно к задаче ранжирования регионов страны по уровню волатильности доходов населения (см. пример ниже).

Следствия

В данном разделе показано, что усиления некоторых из перечисленных требований (i)—(vi) ведут к таким распространенным показателям рассеивания совокупных доходов домашних хозяйств, как дисперсия (стандартное отклонение), отношение дисперсии к математическому ожиданию, коэффициент вариации.

Для формулировки первого результата ведем множество $\widetilde{V}$ всех случайных величин (заданных на одном вероятностном пространстве) с конечными вторыми моментами, а также множество $\widetilde{\mathbf{V}}$ их размещений.

Первое усиление предположения (iii) устанавливает взаимосвязь между индивидуальным и социальным уровнями волатильности доходов:

(iii)′ $\widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \widetilde{\boldsymbol{y}}$ и $\widetilde{x}' \geq \widetilde{y}'$ влечет $(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{x})' \geq (\widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{y})'$, где размещения $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \widetilde{\mathbf{V}}$ и случайные величины $\widetilde{x}', \widetilde{y}' \in \widetilde{V}$ независимы.

Следствие 1

Отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\geq, \widetilde{\mathbf{V}})$ удовлетворяет требованиям (i), (ii), (iii)′, (iv), (v) (с заменой множества $\widetilde{\mathbf{V}}_+$ на $\widetilde{\mathbf{V}}$) тогда и только тогда, когда для любых $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \widetilde{\mathbf{V}}$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \widetilde{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \mathbf{D}\widetilde{x} \geq \mathbf{D}\widetilde{y}, \tag{17}$$

где $\widetilde{x} = \sum_i \widetilde{x}_i$, $\widetilde{y} = \sum_i \widetilde{y}_i$.

Доказательство

Пусть $x \in R$. Найдется невырожденная случайная величина $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{V}$, такая, что $\mathbf{E}\widetilde{x}_1 = x$. Определим последовательность

$$\widetilde{x}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i,\ k = 1, 2, ...,$$

где $\widetilde{x}_k$, $k = 1, 2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

В силу (ii) для любого $y \in R$

$$\widetilde{x}^{(k)} > y_{\text{п.н}},\ k = 1, 2, ... \tag{18}$$

Согласно закону больших чисел при $k \to \infty$ последовательность $\widetilde{x}^{(k)}$ сходится по распределению к вырожденной случайной величине $x_{\text{п.н}}$. Соотношение (18) и требование (iv) влекут

$$x_{\text{п.н}} \geq y_{\text{п.н}}.$$

В силу произвольности выбора x и y

$$x_{\text{п.н}} \sim y_{\text{п.н}} \tag{19}$$

для любых $x, y \in R$.

Из (iii)′ с $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{y}} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x}' = 0_{\text{п.н}}$, $\widetilde{y}' = c_{\text{п.н}}$, (3) и (19) следует

$$\widetilde{x} \sim \widetilde{x} + c \tag{20}$$

для любой случайной величины $\widetilde{x} \in \widetilde{V}$ и константы c.

Комбинируя (20) и (v), имеем

$$\tilde{x} \geq \tilde{y} \Rightarrow \tilde{x} - \mathbf{E}\tilde{x} \geq \tilde{y} - \mathbf{E}\tilde{y} \Rightarrow \alpha(\tilde{x} - \mathbf{E}\tilde{x}) \geq \alpha(\tilde{y} - \mathbf{E}\tilde{y}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha(\tilde{x} - \mathbf{E}\tilde{x}) + \mathbf{E}\tilde{x} \geq \alpha(\tilde{y} - \mathbf{E}\tilde{y}) + \mathbf{E}\tilde{y}$$

для любого $\alpha > 0$. Таким образом, отношение $(\geq, \tilde{\mathbf{V}})$ удовлетворяет предположениям (i)—(vi).

Согласно Утверждению 1, с учетом (20),

$$\tilde{x} \geq \tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{y} \in \tilde{V}_+ \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{D}\tilde{x} \geq \mathbf{D}\tilde{y}. \tag{21}$$

Соотношение (20) продолжает бинарное отношение (21) на все множество $\tilde{V}$.

Очевидно, бинарное отношение на $\tilde{\mathbf{V}}$, порождаемое правилом (17), удовлетворяет требованиям (i), (ii), (iii)′, (iv), (v). ■

Для того чтобы дать интерпретацию второго усиления требования (iii), предположим, что одно домашнее хозяйство состоит из n членов со случайными доходами $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$, а другое — из m членов со случайными доходами $\tilde{\boldsymbol{y}} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m)$, где $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Естественно считать, что эти два домашних хозяйства идентичны по уровню волатильности доходов:

(iii)″ $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \sim (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m)$, где $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Отметим, что аналог данного предположения хорошо известен в теории индексов экономического неравенства (см., например, (Dalton, 1920)).

Нижеследующий результат очевиден, его доказательство опущено.

Следствие 2

Отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\geq, \tilde{\mathbf{V}}_+)$ удовлетворяет требованиям (i), (ii), (iii)″, (iv)—(vi) тогда и только тогда, когда $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{\mathbf{V}}_+$ для любых

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \tilde{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \mathbf{D}\tilde{x}/\mathbf{E}\tilde{x} \geq \mathbf{D}\tilde{y}/\mathbf{E}\tilde{y},$$

где $\tilde{x} = \sum\limits_i \tilde{x}_i$, $\tilde{y} = \sum\limits_i \tilde{y}_i$.

Следующее усиление предположения (v) предоставляет возможность упорядочивания домашних хозяйств по уровню волатильности доходов, измеренных в различных валютах (см., например, (Fields, Fei, 1978; Kolm, 1976a)):

(v)′ $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ влечет $\alpha\tilde{x} \geq \beta\tilde{y}$ для любых $\alpha, \beta > 0$ (или, что то же, $\tilde{x} \sim \alpha\tilde{x}$ для любого $\alpha > 0$).

Доказательство нижеследующего результата также очевидно и потому опущено.

Следствие 3

Отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\geq, \tilde{\mathbf{V}}_+)$ удовлетворяет требованиям (i)–(iv), (v)′, (vi) тогда и только тогда, когда для любых $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{\mathbf{V}}_+$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \tilde{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \mathbf{var}[\tilde{x}] \geq \mathbf{var}[\tilde{y}], \tag{22}$$

где $\tilde{x} = \sum\limits_i \tilde{x}_i$, $\tilde{y} = \sum\limits_i \tilde{y}_i$.

Отметим, что в силу требования (v)′ отношение (22) может использоваться не только для упорядочивания волатильности доходов домашних хозяйств одной страны, но также доходов хозяйств различных стран, измеряемых в различных валютах[1].

Наконец, усиление требования (vi) предполагает, что «растяжение» распределения (Landsberger, Meilijson, 1994) случайных доходов относительно произвольной точки не влияет на упорядочивание домашних хозяйств по уровню волатильности доходов:

(vi)′ $\tilde{x} \geq \tilde{y}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{V}$ влечет $\alpha(\tilde{x} - x) + x \geq \alpha(\tilde{y} - y) + y$ для любых $x, y \in R$ и $\alpha > 0$.

Следствие 4

Отношение сравнительной волатильности доходов домашних хозяйств $(\geq, \tilde{\mathbf{V}}_+)$ удовлетворяет требованиям (i)–(iv), (vi)′ (с заменой множества $\tilde{\mathbf{V}}_+$ на $\tilde{\mathbf{V}}$) тогда и только тогда, когда для любых $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{\mathbf{V}}$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \tilde{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \mathbf{D}\tilde{x} \geq \mathbf{D}\tilde{y}, \tag{23}$$

где $\tilde{x} = \sum_i \tilde{x}_i$, $\tilde{y} = \sum_i \tilde{y}_i$.

Доказательство

Полагая в (vi)′ сначала $x = y = 0$, а затем $x = \mathbf{E}\tilde{x}$, $y = \mathbf{E}\tilde{y}$, убеждаемся, что сужение $(\geq, \tilde{\mathbf{V}}_+)$ отношения $(\geq, \tilde{\mathbf{V}})$ удовлетворяет предположениям (i)—(vi).

Согласно Утверждению 1, с учетом (vi)′,

$$\tilde{x} \geq \tilde{y},\ \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathrm{V}}_+ \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{D}\tilde{x} \geq \mathbf{D}\tilde{y}. \tag{24}$$

Многократно применяя (vi)′, имеем

$$\tilde{x} \sim \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x}/2 \sim \tilde{x}/2 \Rightarrow 2(\tilde{x}/2 - 0) + 0 \sim 2(\tilde{x}/2 + c) - c \Rightarrow \tilde{x} \sim \tilde{x} + c \tag{25}$$

для любого случайного дохода $\tilde{x} \in \tilde{V}$ и константы c.

(25) продолжает бинарное отношение (24) на все множество $\tilde{V}$.

Очевидно, бинарное отношение на $\tilde{\mathbf{V}}$, порождаемое правилом (23), удовлетворяет требованиям (i)–(iv), (vi)′. ■

Несколько комментариев относительно статистической оценки индекса $\mathbf{I}_c$

Если есть основания полагать, что временной ряд совокупных доходов домашнего хозяйства стационарен в широком смысле, то при довольно общих условиях (см., например, (Ширяев, 1980, гл. VI, § 4)), согласно теореме Слуцкого (там же, с. 278), для получения состоятельной оценки индекса $\mathbf{I}_c$ характеристики $\mathbf{E}\tilde{x}$ и $\mathbf{D}\tilde{x}$ в формуле (16) достаточно заменить соответствующими выборочными аналогами. Аналогично, если доходы членов домашнего хозяйства независимы и статистически однородны, то выборочные оценки математического ожидания и дисперсии доходов отдельного члена домашнего хозяйства могут быть использованы для получения состоятельных оценок $\mathbf{E}\tilde{x}$ и $\mathbf{D}\tilde{x}$ совокупных доходов $\tilde{x}$ домашнего хозяйства. Однако эмпирические исследования показы-

[1] Однако анализ подобного рода зачастую весьма затруднен в силу различий подходов к измерению доходов в различных странах.

вают, что (по крайней мере, на примере Российской Федерации) ни одно из данных предположений на практике не выполняется (Обследование бюджетов..., 2006). Данный факт приводит к необходимости использования несколько более общих моделей.

Для получения искомой статистической оценки индекса $\mathbf{I}_c$ ограничимся следующей моделью динамики совокупных доходов домашнего хозяйства:

$$\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{\varepsilon}(t)),\ t = 1, ..., T,\ T \geqslant 2, \tag{26}$$

где $\tilde{x}(t)$, $t = 1, ..., T$ — случайный совокупный доход домашнего хозяйства за период $(t-1, t]$, $f(t; \cdot)$, $t = 1, ..., T$ — последовательность строго монотонно возрастающих функций, а последовательность случайных остатков $\tilde{\varepsilon}(t)$, $t = 1, ..., T$ образует «белый шум»[1].

Для конкретизации функционального вида регрессионной зависимости f в модели (26) воспользуемся следующими эвристическими соображениями: как с экономической, так и с эконометрической (Hendry, Richard, 1983, § 2.2) точек зрения особый интерес для нас представляют модели (26) временного ряда $\tilde{x}(t)$, в которых значения искомого индекса

$$\mathbf{I}_c[\tilde{x}(t)] = (\mathbf{E}f(t, \tilde{\varepsilon}(t)))^c\mathbf{D}f(t, \tilde{\varepsilon}(t)),\ t = 1, ..., T$$

не зависят от времени. В этом случае индекс $\mathbf{I}_c$ имеет ясную интерпретацию, является параметром модели (26) и, по-видимому, может быть оценен особенно просто.

Так, назовем модель (26) *инвариантной относительно индекса* $\mathbf{I}_c$, если $\mathbf{E}\tilde{x}(t) > 0$, $t = 1, ..., T$ и

$$\mathbf{I}_c[\tilde{x}(1)] = ... = \mathbf{I}_c[\tilde{x}(T)]$$

каждый раз, когда последовательность случайных величин $\tilde{\varepsilon}(t)$, $t = 1, ..., T$ образует «белый шум» и индексы $\mathbf{I}_c[\tilde{x}(t)]$, $t = 1, ..., T$ существуют.

Предложение 2

Модель (26) инвариантна относительно индекса $\mathbf{I}_c$ тогда и только тогда, когда

$$f(t; \varepsilon) = g(t) + bg^{-c/2}(t)\varepsilon,\ t = 1, ..., T,$$

где $g(t)$, $t = 1, ..., T$, b — произвольные положительные константы.

Доказательство

Обозначим $g(t) = f(t; 0)$. Полагая в определении инвариантности в качестве $\tilde{\varepsilon}(t)$, $t = 1, ..., T$ последовательность вырожденных в нуле случайных величин, имеем:

$$g(t) = f(t; 0) = \mathbf{E}f(t; 0_{\text{п.н.}}) > 0,\ t = 1, ..., T.$$

В силу монотонности $f(t; \cdot)$ существуют пределы:

$$g_-(t) = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} f(t; \varepsilon),\ g_+(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(t; \varepsilon).$$

Очевидно, $g_-(t) \leqslant g(t) \leqslant g_+(t)$.

Рассмотрим бинарную случайную величину $\tilde{\varepsilon}$, принимающую значения $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$ с вероятностями $\varepsilon_2/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ и $-\varepsilon_1/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ соответственно, и бинар-

[1] Последовательность случайных величин, вырожденных в нуле, также будем считать «белым шумом».

ную случайную величину $\tilde{\varepsilon}'$, принимающую значения $\varepsilon_1' = \varepsilon_1/\alpha$, $\varepsilon_2' = \alpha\varepsilon_2$ с вероятностями $\varepsilon_2'/(\varepsilon_2' - \varepsilon_1')$ и $-\varepsilon_1'/(\varepsilon_2' - \varepsilon_1')$ соответственно, где $\alpha > 0$ — некоторая константа. Очевидно, $\mathbf{E}\tilde{\varepsilon} = \mathbf{E}\tilde{\varepsilon}' = 0$, $\mathbf{D}\tilde{\varepsilon} = \mathbf{D}\tilde{\varepsilon}' = -\varepsilon_1\varepsilon_2$.

В силу инвариантности модели,

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}f(t;\varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}f(t;\varepsilon_2)\right)^c \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}(f(t;\varepsilon_2)-f(t;\varepsilon_1))^2 = \mathbf{I}_c[f(t,\tilde{\varepsilon})] =$$
$$= \mathbf{I}_c[f(t,\tilde{\varepsilon}')] = \left(\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_2'-\varepsilon_1'}f(t;\varepsilon_1') - \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'-\varepsilon_1'}f(t;\varepsilon_2')\right)^c \frac{-\varepsilon_1'\varepsilon_2'}{(\varepsilon_2'-\varepsilon_1')^2}(f(t;\varepsilon_2')-f(t;\varepsilon_1'))^2 =$$
$$= \left(\frac{\alpha\varepsilon_2}{\alpha\varepsilon_2-\varepsilon_1/\alpha}f(t;\varepsilon_1/\alpha) - \frac{\varepsilon_1/\alpha}{\alpha\varepsilon_2-\varepsilon_1/\alpha}f(t;\alpha\varepsilon_2)\right)^c \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\alpha\varepsilon_2-\varepsilon_1/\alpha)^2}(f(t;\alpha\varepsilon_2)-f(t;\varepsilon_1/\alpha))^2$$

для любого t. С учетом монотонности $f(t;\cdot)$ данное соотношение принимает вид

$$\begin{gathered}(\alpha\varepsilon_2 - \varepsilon_1/\alpha)\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}f(t;\varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}f(t;\varepsilon_2)\right)^{\frac{c}{2}}(f(t;\varepsilon_2)-f(t;\varepsilon_1)) = \\ = (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\left(\frac{\alpha\varepsilon_2}{\alpha\varepsilon_2-\varepsilon_1/\alpha}f(t;\varepsilon_1/\alpha) - \frac{\varepsilon_1/\alpha}{\alpha\varepsilon_2-\varepsilon_1/\alpha}f(t;\alpha\varepsilon_2)\right)^{\frac{c}{2}}(f(t;\varepsilon_2)-f(t;\varepsilon_1)).\end{gathered} \tag{27}$$

Полагая в (27) $\varepsilon_1 = -1$, рассмотрим повторный предел левой и правой частей равенства (27) сначала при $\varepsilon_2 \downarrow 0$

$$\frac{1}{\alpha}g_+^{c/2}(t)(g_+(t)-f(t;-1)) = g_+^{c/2}(t)(g_+(t)-f(t;-1/\alpha)), \tag{28}$$

затем при $\alpha \to \infty$

$$0 = g_+^{c/2}(t)(g_+(t)-g_-(t)). \tag{29}$$

Поскольку $0 < g(t) \leqslant g_+(t)$, то равенство (29) возможно, только если при каждом фиксированном t функция $f(t;\cdot)$ непрерывна в нуле:

$$g_-(t) = g(t) = g_+(t). \tag{30}$$

Из (28) и (30) следует

$$f(t;\varepsilon) = g(t) + (g(t) - f(t;-1))\varepsilon,\ \varepsilon < 0. \tag{31}$$

С другой стороны, устремляя в (27) $1/\alpha = -\varepsilon \downarrow 0$, имеем

$$f(t;\varepsilon) = g(t) + (g(t) - f(t;-1))\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Объединяя (31) и (32), получим

$$f(t;\varepsilon) = g(t) + h(t)\varepsilon \text{ для любого } \varepsilon,$$

где $h(t) = g(t) - f(t;-1) > 0$.

В силу инвариантности модели найдется константа $b > 0$, такая, что для любого t и любой стандартизованной случайной величины $\tilde{\varepsilon}$

$$b^2 = \mathbf{I}_c[f(t,\tilde{\varepsilon}(t))] = (\mathbf{E}[g(t)+h(t)\tilde{\varepsilon}])^c\mathbf{D}[g(t)+h(t)\tilde{\varepsilon}] = g^c(t)h^2(t). \tag{33}$$

Из (33) и строгого монотонного возрастания $f(t;\cdot)$ следует

$$h(t) = bg^{-c/2}(t). \blacksquare$$

В качестве примера рассмотрим модель, инвариантную относительно индекса $\mathbf{I}_c$,

$$\tilde{x}(t) = g_p(t) + g_p^{-c/2}(t)\,\tilde{\varepsilon}(t),\ t = 1, \ldots, T,$$

в которой функция регрессии g_p принадлежит некоторому параметрическому семейству $G(\mathrm{P}) = \{g_p, p \in \mathrm{P}\}$ положительных функций, а ошибки $\tilde{\varepsilon}(t)$, $t = 1, \ldots, T$ независимы и одинаково нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией σ^2.

В данной модели нас интересует параметр

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\,\tilde{\varepsilon}(t) = (\mathbf{E}\tilde{x}(t))^c\mathbf{D}\tilde{x}(t) = \mathbf{I}_c[\tilde{x}(t)].$$

Нетрудно убедиться, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\sigma}^2$ параметра σ^2 для данной модели имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x(t) - g_{\hat{p}}(t))^2 g_{\hat{p}}^c(t),$$

где $x(t)$, $t = 1, \ldots, T$ — наблюдаемая реализация случайного процесса $\tilde{x}(t)$, $t = 1, \ldots, T$, $\hat{p} \in \mathrm{P}$ — оценка максимального правдоподобия параметра p (предполагается, что она существует).

Пример

Как уже упоминалось, по формальным признакам введенный индекс $\mathbf{I}_c$ может использоваться и для измерения сравнительной волатильности доходов в более общих социальных подсистемах, чем домашнее хозяйство.

В качестве примера рассмотрим задачу упорядочивания 11 регионов Северо-Западного федерального округа РФ по уровню сравнительной волатильности доходов населения. Исходными статистическими данными послужили реальные денежные доходы населения в 1999—2007 гг.[1] Отсутствие официальных данных о реальных располагаемых доходах населения (соответствующие расчеты с разбивкой по регионам осуществляются Федеральной службой государственной статистики лишь начиная с 2005 г.) заставляет нас предположить, что для каждого региона отношение реальных доходов населения к реальным располагаемым доходам сохраняется на протяжении рассматриваемого периода. В этой ситуации $\mathbf{I}_{-2} = \mathbf{var}^2$ может служить естественным выбором индекса сравнительной волатильности доходов населения (в силу свойства (v)′).

В первом приближении можно также предположить, что для каждого региона k ($k = 1, \ldots, 11$) существует единый на протяжении рассматриваемого периода темп роста суммарных доходов a_k. Простейшая модель, инвариантная относительно индекса $\mathbf{I}_{-2}$, в этом случае имеет вид

$$\tilde{x}_k(t) = b_k e^{a_k t}(1 + \tilde{\varepsilon}_k(t)),\ t = 1, \ldots, 9,\ k = 1, \ldots, 11, \tag{34}$$

где $\tilde{x}_k(t)$, $t = 1, \ldots, 9$ — случайный суммарный доход населения в регионе k в году $1998 + t$; a_k — среднегодовой темп роста суммарных доходов населения в регионе k; $a_k > 0$ — ожидаемый суммарный доход в 1998 г. в регионе k, а последовательности ошибок $\tilde{\varepsilon}_k(t)$, $t = 1, \ldots, 9$ образуют независимые «белые шумы» с не-

[1] Источник данных: Федеральная служба государственной статистики (http://www.gks.ru/dbscripts/Cbsd/DBInet.cgi?pl=2340036).

известными дисперсиями σ_k^2. Мы также дополнительно предположим, что $|\tilde{\varepsilon}_k(t)| < 1$ с вероятностью 1, $t = 1, ..., 9$, $k = 1, ..., 11$.

В данной модели нас интересуют параметры

$$\sigma_k^2 = \frac{\mathbf{D}\tilde{x}_k(t)}{(\mathbf{E}\tilde{x}_k(t))^2} = \mathbf{var}^2[\tilde{x}_k(t)] = \mathbf{I}_{-2}[\tilde{x}_k(t)],\ k = 1, ..., 11.$$

Обозначим

$$\tilde{x}_k'(t) = \ln \tilde{x}_k(t),\ b_k' = \ln b_k - \sigma_k^2/2,\ \tilde{\varepsilon}_k'(t) = \ln(1 + \tilde{\varepsilon}_k(t)) + \sigma_k^2/2,\ k = 1, ..., 11.$$

В новых обозначениях регрессии (34) примут линейный вид

$$\tilde{x}_k(t) = b_k' + a_k t + \tilde{\varepsilon}_k'(t),\ t = 1, ..., 9,\ k = 1, ..., 11, \qquad (35)$$

причем

$$\mathbf{E}[\tilde{\varepsilon}_k'(t)] = \mathbf{E}\ln(1 + \tilde{\varepsilon}_k(t)) + \frac{\sigma_k^2}{2} = \mathbf{E}\left[\tilde{\varepsilon}_k(t) - \frac{\tilde{\varepsilon}_k^2(t)}{2} + ...\right] + \frac{\sigma_k^2}{2} \approx \mathbf{E}\tilde{\varepsilon}_k(t) = 0,$$
$$k = 1, ..., 11,$$

$$\mathbf{D}[\tilde{\varepsilon}_k'(t)] = \mathbf{E}\ln^2(1 + \tilde{\varepsilon}_k(t)) - [\mathbf{E}\ln(1 + \tilde{\varepsilon}_k(t))]^2 = \mathbf{E}[\tilde{\varepsilon}_k^2(t) + ...] - (\mathbf{E}\tilde{\varepsilon}_k(t) + ...)^2 \approx$$
$$\approx \mathbf{E}\tilde{\varepsilon}_k^2(t) = \sigma_k^2$$

(здесь мы воспользовались разложениями функций $\ln(1 + x)$ и $\ln^2(1 + x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{E}\tilde{\varepsilon}_k(t) = 0$).

Используя для нахождения оценок неизвестных параметров a_k, b_k', $k = 1, ..., 11$ регрессий (35) метод наименьших квадратов, получаем следующее упорядочивание регионов Северо-Западного федерального округа по убыванию выборочного значения индекса сравнительной волатильности доходов населения $\mathbf{I}_{-2}$ (табл.).

Отметим, что данный пример следует рассматривать не более чем демонстрационный: некоторые из сделанных предположений слабо реалистичны; в связи с малым числом доступных наблюдений (по 9 наблюдений на регион) статистическая значимость полученных выводов довольно низкая. По этой же причине мы опускаем здесь процедуры, связанные с проверкой качества подгонки модели.

Таблица

Сравнительная волатильность доходов населения регионов Северо-Западного федерального округа РФ

Регион	Ранг региона по уровню сравнительной волатильности	Оцененное значение индекса
Ненецкий автономный округ	1	16,2
Калининградская область	2	6,1
г. Санкт-Петербург	3	4,7
Ленинградская область	4	4,3
Республика Коми	5	3,2
Псковская область	6	3,0
Мурманская область	7	1,7
Вологодская область	8	1,3
Новгородская область	9	1,1
Архангельская область	10	0,9
Республика Карелия	11	0,8

Заключение

В статье получена простая характеризация индекса, представляющего собой мультипликативную свертку математического ожидания и дисперсии совокупных реальных располагаемых денежных доходов домашнего хозяйства. Данный результат позволяет, в частности, аксиоматически обосновать такие часто используемые на практике частные случаи этого индекса, как дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации, отношение дисперсии к математическому ожиданию доходов. Кроме того, приведены некоторые эвристические соображения, позволяющие упростить статистическую оценку данного индекса, и пример расчета.

На наш взгляд, полученные результаты могут служить оправданием в пользу применения данного индекса для измерения волатильности реальных располагаемых денежных доходов населения.

Источники

Глухов В. В. Коллективные модели управления финансами в домашнем хозяйстве // Финансы и кредит. 2007. № 29 (269). С. 57–61.

Диагностика социальной напряженности в обществе: региональный аспект / под ред. П. В. Акинина, С. В. Рязанцева. Ставрополь, 2002.

Кириллов Р. Мимо кассы // РБК daily. 2008. 11 нояб.

Обследование бюджетов домашних хозяйств. Федеральная служба государственной статистики. 2006. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.micro-data.ru/obdh/obdhmicr/Main.htm

Шевяков А., Кирута А. Измерение экономического неравенства. М., 2002.

Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1980.

Aczél J. Determining merged relative scores // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1990. Vol. 150. P. 205–243.

Bickel P. J., Lehmann E. L. Descriptive statistics for nonparametric models. III. Dispersion // The Annals of Statistics. 1976. Vol. 4. N 6. P. 1139–1158.

Coombs C. H., Lehner P. E. An evaluation of two alternative models for a theory of risk: Part I // Journal of Experimental Psychology, Human Perception and Performance. 1981. Vol. 7. P. 1110–1123.

Cowell F. A. Measuring Inequality. Hemel Hempstead, 2007.

Dalton H. Measurement of the inequality of incomes // Economic Journal. 1920. Vol. 30. No. 119. P. 348–361.

Debreu G. Representation of a preference ordering by a numerical function / ed. by R. M. Thrall, C. H. Coombs, R. L. Davis. Decision Processes. N. Y., 1954. P. 159–165.

Ebert U. Measurement of inequality: an attempt at unification and generalization // Social Choice and Welfare. 1988. Vol. 5. P. 147–169.

Falmagne J. C. Elements of psychophysical theory. London, 1985.

Fields G. S., Fei J. C. H. On inequality comparisons // Econometrica. 1978. Vol. 46. N 2. P. 303–316.

Hendry D. F., Richard J.-F. The econometric analysis of economic time series // International Statistical Review. 1983. Vol. 51. N 2. P. 111–148.

Herstein I. N., Milnor J. An axiomatic approach to measurable utility // Econometrica. 1953. Vol. 21. N 2. P. 291–297.

Hughes G. Street robberies, house burglaries, wallet thefts increases as financial crisis deepens // The Australian. 2008. 26 Dec.

Kolm S.-C. Unequal inequalities I // Journal of Economic Theory. 1976a. Vol. 12. P. 416–442.

Kolm S.-C. Unequal inequalities II // Journal of Economic Theory. 1976b. Vol. 13. P. 82–111.

Landsberger M., Meilijson I. Co-monotone allocations, Bickel-Lehmann dispersion and Arrow-Pratt measure of risk aversion // Annals of Operations Research. 1994. Vol. 52. P. 97–106.

Levitt S. D., Dubner S. J. Freakonomics. N. Y., 2005.

Pedersen C. S., Satchell S. E. Choosing the right measure of risk: a survey // The Current State of Economic Science / ed. by S. B. Dahiya. Rohtak, 1999. Vol. 2.

Pflug G. Ch. How to measure risk? // ed. by U. Leopold-Wildburger, G. Feichtinger, and K.-P. Kistner. Modelling and Decisions in Economics. Heidelberg, 1999. P. 39–59.

Pollatsek A., Tversky A. A theory of risk // Journal of Mathematical Psychology. 1970. Vol. 7. P. 540–553.

Rothschild M., Stiglitz J. E. Increasing risk: I. A definition // Journal of Economic Theory. 1970. Vol. 2. P. 225–243.

The crime drop in America / Ed. by A. Blumstein, J. Wallman. N. Y., 2006.