**В. Д. Матвеенко**

докт. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, профессор Европейского университета в Санкт-Петербурге

# РЕСУРСЫ, ИНСТИТУТЫ, ИННОВАЦИИ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ: ДВОЙСТВЕННЫЙ ПОДХОД[1]

## Введение

Понятие институтов, которое в течение нескольких десятилетий разрабатывалось «новой институциональной экономикой» (Фуруботн, Рихтер, 2005), сегодня активно используется в самых разных областях экономики (см., например, Матвеенко, 2006(а)). Делаются и первые попытки формализовать само это понятие и построить своего рода исчисление институтов (Макаров, 2003). Ряд авторов полагают, что институты играют столь же важную роль в производстве, как и физические ресурсы и физические технологии. Так, например, Р. Холл и Ч. Джонс (Hall, Jones, 1999) показывают, что различия в доходах между странами в значительной степени объясняются различиями в их *социальной инфраструктуре* (институтах и политике). Р. Нельсон (Nelson, Sampat, 2001; Nelson, 2006) связывает институты с *социальными технологиями*, которые используются в производстве, в определенном смысле, симметрично физическим технологиям. Однако представление о двойственности ресурсов и институтов, физических и социальных технологий еще находится в стадии становления.

Цель статьи — на модельном уровне рассмотреть триаду «ресурсы—институты—производство». Понятие *ресурсы* включает физические факторы производства, такие как труд, физический капитал, человеческий капитал, используемые природные ресурсы. Отдельно рассматривается также некоторый *информационный ресурс*. Понятие *институты* относится здесь, например, к таким категориям, как информационное обеспечение, менеджмент, финансы, образование. Понятие *производство* включает как *физические технологии*, описываемые в модели «глобальной» производственной функцией, так и связанные с институтами *социальные технологии*, которые описываются сопряженной функцией.

В основе анализа, который проводится в статье, лежит метод представления производственных функций и их сопряженных посредством «элементарных» функций леонтьевского типа. Тем самым функция Леонтьева выступает не только как простейший тип производственной функции, но и как «кирпичик», составляющий основу любой производственной функции. «Глобальная» производственная функция представляется как результат оптимального выбора «локальной» леонтьевской технологии из заданного технологического меню

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 07-02-04048а).

(Matveenko, 1997; Rubinov, Glover, 1998; Jones, 2005). Оказывается, что сопряженная функция, описывающая в нашей модели социальные технологии, симметричным образом представляется как решение «двойственной» задачи, которая также состоит в выборе локальной леонтьевской технологии из того же самого технологического меню.

Эта пара задач интерпретируется в модели как оптимальный выбор, осуществляемый двумя группами менеджеров, имеющими несовпадающие интересы: *производственниками* и *бюрократами*. Цель производственников состоит в максимизации выпуска, тогда как цель бюрократов — в минимизации удельного расхода информационного ресурса.

В рамках этой модели рассматривается вопрос о *согласованности*, т. е. о совпадении выбора локальной технологии обеими группами менеджеров. Оказывается, что необходимым и достаточным условием согласованности является полная загрузка всех используемых в экономике ресурсов — физических и информационного.

Технический прогресс в модели изменяет технологическое меню и в результате может влиять на согласованность указанной пары задач. Если технический прогресс не сопровождается институциональными изменениями, то он приводит к *рассогласованности*: выбор производственников и бюрократов расходится, и если окончательное решение принимают бюрократы, то это приводит к ограничивающей роли численности работников и к пониженным темпам роста экономики. В рамках модели выход состоит в постоянном изменении социальной технологии по мере движения экономики по траектории роста.

В последнее десятилетие особую актуальность приобрел вопрос об институциональных преобразованиях, необходимых для ускорения экономического роста в развивающихся и переходных экономиках. Основная точка зрения на этот счет состоит в том, что существуют определенные институты, способствующие экономическому росту, которые и следует выращивать в стране. Высказывается, однако, немало противоречивых мнений о том, о каких именно институтах должна идти речь и с какими объективными трудностями должен столкнуться процесс институциональных преобразований (см., например, Полтерович, 1999, 2001; Заостровцев, 2005; Аузан, 2006; Тамбовцев, 2006).

Вывод, к которому мы приходим в результате рассмотрения модели, дает новую точку зрения на условия успеха институциональных преобразований, направленных на обеспечение устойчивого экономического роста. Играет роль не столько «стартовое» изменение институтов, позволяющее начать переход к устойчивому росту, и не столько чисто количественное изменение какой-то одной характеристики институтов, сколько возможность постоянных структурных институциональных преобразований по мере экономического роста. Для этого институты должны обладать значительной гибкостью.

Возможная интерпретация институтов в модели — образование менеджеров. Модель можно рассматривать как продолжение линии исследований, начатой работой (Nelson, Phelps, 1966), в которой впервые моделировались последствия несоответствия образования менеджеров требованиям технического прогресса. Принципиальная особенность нашей модели — ее структурный, а не только количественный характер.

### «Элементарные» функции: описание физических и социальных технологий

Пусть имеется $n$ *физических ресурсов*: $i = 1, 2, ..., n$ (например, труд, физический капитал, человеческий капитал, используемые природные ресурсы и т. д.). *Леонтьевская технология* предполагает использование ресурсов в заданной пропорции; она задается коэффициентами производительности ресурсов $l_i$,

$i = 1, ..., n$, при этом для выпуска единицы продукта необходимы затраты $l_i^{-1}$ ресурсов $i = 1, ..., n$.

Важную роль в работе будут играть три *«элементарные» функции.*

1. Функция Леонтьева

$$\min_i l_i x_i$$

– показывает гарантированный выпуск по леонтьевской технологии $l = (l_1, ..., l_n)$ при наличии вектора физических ресурсов $x = (x_1, ..., x_n)$.

2. Функция предельного выпуска

$$\max_i l_i x_i$$

– показывает предельно возможный выпуск в открытой экономике. Это верхняя граница выпуска по данной леонтьевской технологии при наличии возможности обменивать ресурсы на внешнем рынке по сколь угодно выгодным ценам.

Пусть институты характеризуются вектором *социальной технологии* $h = (h_1, ..., h_n)$, где $h_i$ — необходимое количество *информационного ресурса* на единицу физического ресурса $i$. Информационный ресурс обладает характерными свойствами общественного блага — он может одновременно обслуживать взятые в определенных количествах все физические ресурсы $i = 1, ..., n$. С институтами (социальной технологией) связана третья «элементарная» функция.

3. Функция социальной технологии

$$\max_i h_i l_i^{-1}$$

– показывает необходимое количество информационного ресурса для выпуска единицы продукта при социальной технологии $h = (h_1, ..., h_n)$ и леонтьевской физической технологии $l = (l_1, ..., l_n)$.

### Представление «глобальной» производственной функции

Пусть $F(x)$ — «глобальная» $n$-факторная производственная функция. (Это может быть, например, функция типа Кобба—Дугласа или CES.) Покажем, что существует такое множество леонтьевских технологий $\Lambda$ — *технологическое меню*, — что $F(x)$ представляет собой оптимальный выбор «локальной» леонтьевской технологии на множестве $\Lambda$.

Будем рассматривать функции $F(x)$ на множестве $R^n_{++}$, состоящем из всех $n$-мерных векторов $x$ со строго положительными координатами и начала координат. (Таким образом, за исключением начала координат, не рассматриваются векторы $x$, имеющие нулевые координаты. Это не сужает класса производственных функций: сама по себе функция $F(x)$ может быть определена и при $x$, имеющих нулевые координаты, как, например, функции Кобба—Дугласа или CES.)

Применительно к векторам будем использовать обозначение $x > y$, если $x_i > y_i$, $i = 1, ..., n$. Будем предполагать, что $F(0) = 0$, и $F(x) > 0$ при $x > 0$. Функция $F(.)$ называется *возрастающей*, если из $x > y$ следует, что $F(x) > F(y)$ .

Для вектора $x > 0$ определим вектор, состоящий из обратных элементов:

$$x^{-1} = \{x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\}.$$

Пусть $M_1$ — множество единичного уровня функции $F(.)$, т. е.

$$M_1 = \{x : F(x) = 1\}.$$

Определим множество

$$\Lambda = \{l : l^{-1} \in M_1\}.$$

ЛЕММА. Если $F(.)$ — *возрастающая функция, однородная степени* $q > 0$, то

$$\min_i l_i x_i \leqslant F(x) = 1 \leqslant \max_i l_i x_i$$

для любых $x \in M_1$, $l \in \Lambda$.

**Доказательство.** Докажем, что $\min_i l_i x_i \leqslant 1$. Предположим противное: $l_i x_i > 1$ при всех $i = 1, ..., n$. Тогда $x > l^{-1}$. Можно подобрать такое число $\lambda > 1$, что $x > \lambda l^{-1}$. Тогда $F(x) > F(\lambda l^{-1}) = \lambda^q F(l^{-1}) > F(l^{-1})$, что невозможно, поскольку $x\, l^{-1} \in M_1$.

Неравенство $\max_i l_i x_i \geqslant 1$ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Если $F(.)$ — *возрастающая функция, положительно однородная первой степени*, то

$$F(x) = \max_{l \in \Lambda} \min_i l_i x_i = \min_{l \in \Lambda} \max_i l_i x_i,\ x \in R^n_{++}.$$

**Доказательство.** Всякий вектор $x > 0$ можно представить в виде $x = F(x)\overline{x}$, где $\overline{x} \in M_1$. Для любого $l \in \Lambda$ по лемме

$$\min_i l_i \overline{x}_i \leqslant F(\overline{x}) = 1.$$

Отсюда

$$\min_i l_i x_i = F(x) \min_i l_i \overline{x}_i \leqslant F(x).$$

Неравенство здесь выполняется как равенство, если $l = \overline{x}^{\,-1}$, таким образом, достигается максимум:

$$\max_{l \in \Lambda} \min_i l_i x_i = F(x).$$

Равенство

$$\min_{l \in \Lambda} \max_i l_i x_i = F(x)$$

доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Экономический смысл этой теоремы с учетом интерпретации второй «элементарной» функции состоит в том, что при имеющихся ресурсах $x$ одна и та же леонтьевская технология из технологического меню дает как максимальный гарантированный выпуск, так и минимальный предельный выпуск.

## Сопряженная функция

Понятия сопряженного пространства и сопряженного функционала, развитые в функциональном анализе, использовались в математической экономике применительно к суперлинейным и сублинейным функционалам и функциям (см. Макаров, Рубинов, 1973; Рубинов, 1980). Производственную функцию (возрастающую положительно однородную первой степени) можно рассматривать как аналог суперлинейной и сублинейной функций, и для нее также определить понятия, относящиеся к сопряженности (см. Абасов, Рубинов, 1995; Matveenko, 1997; Rubinov, Glover, 1998).

Следуя (Rubinov, Glover, 1998), можно определить пару взаимно сопряженных множеств

$$\Omega = \{x : F(x) \leqslant 1\},$$

$$\Omega^{\circ} = \{l : \min_i l_i x_i \leqslant 1 \text{ при всех } x \in \Omega\}.$$

Эти множества имеют прозрачный экономический смысл: $\Omega$ — это множество всех наборов физических ресурсов, из которых, располагая производственной функцией $F(.)$, можно выпустить не более единицы продукта; $\Omega^{\circ}$ — множество леонтьевских технологий (технологическое меню), в определенном смысле эквивалентное производственной функции $F(.)$, а именно позволяющее выпустить не более единицы продукта с использованием наборов ресурсов из множества $\Omega$.

Геометрически $\Omega$ — это множество точек, расположенных не выше поверхности единичного уровня $M_1$, а $\Omega^{\circ}$ — множество точек, лежащих не выше поверхности $\Lambda$.

Можно убедиться в справедливости равенства $(\Omega^{\circ})^{\circ} = \Omega$.

Функция $F(.)$, как следует из теоремы 1, удовлетворяет равенству

$$F(x) = \max_{l \in \Omega^{\circ}} \min_i l_i x_i\,,$$

которое может служить «прототипом» для определения *сопряженной функции*

$$F^{\circ}(l) = \max_{x \in \Omega} \min_i l_i x_i\,. \tag{1}$$

Сопряженная функция $F^{\circ}(.)$ является возрастающей положительно однородной первой степени, и $(F^{\circ})^{\circ}(.) = F(.)$.

Определенная равенством (1) сопряженная функция $F^{\circ}(.)$ имеет очевидный экономический смысл: для каждой леонтьевской технологии $l$ она показывает максимальный выпуск, который будет достигнут, если набор ресурсов выбирается из множества $\Omega$.

Более интересная для нас экономическая интерпретация сопряженной функции $F^{\circ}(.)$ будет вытекать из ее представления, аналогичного представлению функции $F(.)$ по теореме 1. Такое представление сопряженной функции дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.

$$F^{\circ}(l) = \max_{x \in M_1} \min_i l_i x_i = \min_{x \in M_1} \max_i l_i x_i\,,\ l \in R^n_{++}. \tag{2}$$

**Доказательство.** Первое равенство в (2) непосредственно вытекает из (1). Чтобы получить второе равенство, заметим, что если $x \in M_1$, $l \in \Lambda$, то $\max_i l_i x_i \geqslant 1$. (В противном случае имело бы место неравенство $\min_{l \in \Lambda} \max_i l_i x_i < 1$, что противоречит теореме 1.) Следовательно,

$$F^{\circ}(l) = 1 = \min_{x \in M_1} \max_i l_i x_i$$

при $l \in \Lambda$ (минимум достигается при $x = l^{-1}$), а для других $l$ равенство $F^{o}(l) = \min\limits_{x \in M_1} \max\limits_i l_i x_i$ сохраняется в силу однородности.

Теорема доказана.

Будем теперь в качестве аргумента сопряженной функции $F^{o}(.)$ использовать вектор социальной технологии $h$. Тогда по теореме 2

$$F^{o}(h) = \min_{x \in M_1} \max_i h_i x_i = \min_{l \in \Lambda} \max_i h_i l_i^{-1}.$$

Таким образом, для каждой социальной технологии $h$ сопряженная функция $F^{o}(h)$ показывает наименьшие затраты информационного ресурса, необходимые для выпуска единицы продукта посредством технологического меню $\Lambda$.

## Вычисление сопряженных функций

Выведем формулу для вычисления сопряженной функции (см. также Matveenko, 1997; Rubinov, Glover, 1998).

ТЕОРЕМА 3. Если $F(.)$ — *возрастающая положительно однородная первой степени функция*, то

$$F^{o}(h) = \frac{1}{F(h^{-1})}, \ h \gg 0.$$

**Доказательство.**

$$F^{o}(h) = \min_{l \in \Lambda} \max_i h_i l_i^{-1} = \frac{1}{\max\limits_{l \in \Lambda} \min\limits_i h_i^{-1} l_i} = \frac{1}{F(h^{-1})}.$$

Теорема доказана.

Вычислим сопряженные для основных неоклассических производственных функций: Леонтьева, Кобба—Дугласа и CES.

А. Для функции Леонтьева $F_L(x) = \min\limits_i l_i x_i$ сопряженной является третья «элементарная» функция: $F_L^{o}(h) = \max\limits_i l_i^{-1} h_i$. Действительно, по теореме 3

$$F^{o}(h) = \frac{1}{\min\limits_i l_i h_i^{-1}} = \max_i l_i^{-1} h_i.$$

Таким образом, в силу теорем 1 и 2, «глобальная» производственная функция $F(.)$ и ее сопряженная $F^{o}(.)$ представимы посредством «элементарных» функций — функций Леонтьева и их сопряженных соответственно.

Б. Для функции Кобба—Дугласа $F_{CD}(x) = A x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ (где $A > 0$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$) сопряженной является также функция Кобба—Дугласа

$$F_{CD}^{o}(h) = A^{-1} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}.$$

Действительно, по теореме 3

$$F_{CD}^{o}(h) = \frac{1}{A h_1^{-\alpha_1} \ldots h_n^{-\alpha_n}} = A^{-1} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}.$$

В. Для CES-функции $F_{CES}(x) = [\theta_1(A_1x_1)^p + \ldots + \theta_n(A_nx_n)^p]^{1/p}$ (где $p < 1$, $A_i > 0$, $\theta_i \in [0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$) сопряженной является функция

$$F^{\mathrm{o}}_{CES}(h) = [\theta_1(A_1^{-1}h_1)^{-p} + \ldots + \theta_n(A_n^{-1}h_n)^{-p}]^{-1/p}.$$

Действительно, по теореме 3

$$F^{\mathrm{o}}_{CES}(h) = \frac{1}{[\theta_1(A_1h_1^{-1})^p + \ldots + \theta_n(A_nh_n^{-1})^p]^{1/p}} = [\theta_1(A_1^{-1}h_1)^{-p} + \ldots + \theta_n(A_n^{-1}h_n)^{-p}]^{-1/p}.$$

В случае когда $-1 < p < 1$, выполнены и неравенства $-1 < -p < 1$, т. е. сопряженная функция $F^{\mathrm{o}}_{CES}(h)$ также представляет собой неоклассическую CES-функцию.

## Условия согласованности

Итак, с производственной функцией и ее сопряженной функцией связана пара «двойственных» задач (3), (4).

Задача (3). Выбрать из технологического меню $\Lambda$ леонтьевскую технологию $l$, при которой для заданного набора ресурсов $x$ будет получен максимальный выпуск:

$$F(x) = \max_{l \in \Lambda} \min_i l_i x_i, \; x \in R^n_{++}. \tag{3}$$

Задача (4). Выбрать из технологического меню $\Lambda$ леонтьевскую технологию $l$, при которой для заданной социальной технологии $h$ затраты информационного ресурса на единицу выпускаемого продукта минимальны:

$$F^{\mathrm{o}}(h) = \min_{l \in \Lambda} \min_i l_i^{-1} h_i, \; h \in R^n_{++}. \tag{4}$$

Представим себе, что в стране есть два типа менеджеров: *производственники* и *бюрократы* и задачу (3) решают производственники, а задачу (4) — бюрократы.

Возникает естественный вопрос: в каком случае задачи (3) и (4) *согласованы*, в том смысле, что они дают в качестве решения одну и ту же оптимальную леонтьевскую технологию $l_*$?

Нетрудно проверить, что решения задач (3) и (4) достигаются соответственно в точках:

$$l_1 = F(x)x^{-1},$$

$$l_2 = \left(F^{\mathrm{o}}(h)\right)^{-1}h.$$

Напомним, что единица информационного ресурса, имеющего, как мы помним, характер общественного блага, обслуживает одновременно объемы физических ресурсов $h_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Условием *полной занятости информационного ресурса* является пропорциональность вектора $h^{-1}$ и вектора наличных физических ресурсов $x$, т. е. равенство

$$h^{-1} = \lambda x, \text{ где } \lambda > 0. \tag{5}$$

При этом условии возможности имеющегося информационного ресурса используются полностью, т. е. нельзя увеличить расход физических ресурсов (и выпуск), не увеличив расход информационного ресурса.

Аналогично каждая единица выпуска требует затрат физических ресурсов $l_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Условие *полной занятости физических ресурсов* состоит в пропорциональности векторов $l^{-1}$ и $x$, т. е. равенстве

$$l^{-1} = \mu x, \text{ где } \mu > 0. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 4. *Задачи* (3) *и* (4) *согласованы тогда и только тогда, когда все ресурсы (физические и информационный) полностью заняты.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть задачи (3) и (4) согласованы: решения в этих задачах достигаются в некоторой общей точке $l_*$. Тогда, как видно из решений,

$$l_*^{-1} = \left[F(x)\right]^{-1} x,$$

$$h^{-1} = \left[F^{\circ}(h)\right]^{-1} l_*^{-1} = \left[F^{\circ}(h) F(x)\right]^{-1} x,$$

т. е. справедливы равенства (5), (6) — все ресурсы полностью заняты.

Достаточность. Пусть $l_1$ — решение задачи (3), $l_2$ — решение задачи (4) и все ресурсы полностью заняты:

$$l_1^{-1} = \left[F(x)\right]^{-1} x,$$

$$l_2^{-1} = F^{\circ}(h) h^{-1} = F^{\circ}(h) \lambda x, \text{ где } \lambda > 0.$$

Тогда векторы $l_1, l_2 \in \Lambda$ пропорциональны. Отсюда следует, что $l_1 = l_2$.

Теорема доказана.

## Автономный технический прогресс

Пусть теперь глобальная производственная функция $F(x, t)$, зависящая от $n$-мерного вектора факторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, зависит также и от времени $t$. Тогда множество единичного уровня $M_1(t)$ и множество его «обратных» элементов $\Lambda(t)$ также зависят от времени.

Говорят, что имеет место *факторододобавляющий технический прогресс*, если

$$F(x, t) = F(A_1(t) x_1, \ldots, A_n(t) x_n). \tag{7}$$

Частным случаем является *технический прогресс, нейтральный по Хиксу*, когда

$$F(x, t) = A(t) F(x).$$

Коэффициент $A(t)$ известен как *общая производительность факторов* (total factor productivity, TFP).

Из однородности следует, что наличие факторододобавляющего технического прогресса эквивалентно тому, что для любых двух моментов времени $t_2 > t_1$ множества единичного уровня связаны равенством

$$M_1(t_2) = \{x : x_i = \frac{A_i(t_1)}{A_i(t_2)} x_i(t_1),\ i = 1, \ldots, n,\ x(t_1) \in M_1(t_1)\}.$$

Соответственно для технологических меню

$$\Lambda(t_2) = \{l : l_i = \frac{A_i(t_2)}{A_i(t_1)} l_i(t_1),\ i = 1, \ldots, n,\ l(t_1) \in \Lambda(t_1)\}.$$

В частности, если $A_i(t) = \gamma_i^t A_i(0)$, то при $t > 0$:

$$M_1(t) = \{x : x_i = \gamma_i^{-t}\overline{x}_i,\ i = 1, ..., n,\ \overline{x} \in M_1(0)\},$$
$$\Lambda(t) = \{l : l_i = \gamma_i^t \bar{l}_i,\ i = 1, ..., n,\ \bar{l} \in \Lambda(0)\}. \qquad (8)$$

В случае технического прогресса, нейтрального по Хиксу,

$$M_1(t_2) = \frac{A(t_1)}{A(t_2)} M_1(t_1),$$
$$\Lambda(t_2) = \frac{A(t_2)}{A(t_1)} \Lambda(t_1),$$

где умножение множества на число означает, что все элементы множества умножаются на это число. Если $A(t) = \gamma^t A_0$, то

$$M_1(t_2) = \gamma^{t_1 - t_2} M_1(t_1),$$
$$\Lambda(t_2) = \gamma^{t_2 - t_1} \Lambda(t_1).$$

Если функция $A(t)$ возрастает (в частности, если $A(t) = \gamma^t A_0$, $\gamma > 1$), то при $t_2 > t_1$ поверхность $\Lambda(t_2)$ находится выше поверхности $\Lambda(t_1)$, причем при переходе от $t_1$ к $t_2$ технический прогресс гомотетично изменяет технологическое меню $\Lambda(t)$.

Напомним (см., например, Ашманов, 1984; Матвеенко, 2006(б)), что в двухфакторном случае (пусть для определенности факторы производства — это труд $L$ и капитал $K$) выделяют *технический прогресс, нейтральный по Харроду*,

$$F(K, L, t) = F(K, A(t)L)$$

и *технический прогресс, нейтральный по Солоу*,

$$F(K, L, t) = F(A(t)K, L).$$

Для функции Кобба—Дугласа все три формы технического прогресса (нейтральный по Хиксу, по Харроду, по Солоу) эквивалентны. Например, если технический прогресс в форме Хикса имеет постоянный темп роста $\gamma$:

$$F(K, L, t) = \gamma^t A_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad (9)$$

то при записи в форме Харрода темп роста прогресса равен $1/(1-\alpha)$:

$$F(K, L, t) = K^{\alpha}[\gamma_2^t A_2(0) L]^{1-\alpha}, \text{ где } \gamma_2 = \gamma^{1/(1-\alpha)},\ A_2(0) = A_0^{1/(1-\alpha)}. \qquad (10)$$

## Технический прогресс, сбалансированный рост и рассогласованность

Рассмотрим типичную в теории экономического роста ситуацию *сбалансированного роста с трудодобавляющим техническим прогрессом*, когда модель с двухфакторной производственной функцией развивается по сбалансированной траектории, где капитал $K$, выпуск $Y$ и потребление $C$ растут одним и тем же темпом роста $\varphi$, труд растет темпом роста $\beta < \varphi$, и имеется технический прогресс, нейтральный по Харроду, обладающий темпом роста $\gamma_2 = \varphi/\beta > 1$ (время дискретное).

В терминах предыдущего раздела имеет место факторододобавляющий технический прогресс, для которого коэффициенты эффективности капитала и труда равны соответственно

$$A_1(t) = \text{const},$$

$$A_2(t) = \gamma^t A_2(0).$$

При этом в силу (8) каждая конкретная технология $l(0) = (l_1(0), l_2(0)) \in \Lambda(0)$ преобразуется с течением времени следующим образом:

$$l_1(t) = l_1(0) = \text{const}, \; l_2(t) = \gamma^t l_2(0). \quad (11)$$

Заметим, что если первоначально (при $t = 0$) выполняется условие полной занятости физических ресурсов, т. е.

$$\frac{K(0)}{L(0)} = \frac{l_2(0)}{l_1(0)} = \chi,$$

то это условие выполняется и в дальнейшем на данной сбалансированной траектории:

$$\frac{K(t)}{L(t)} = \frac{l_2(t)}{l_1(t)} = \gamma^t \chi.$$

Иными словами, если первоначально (в период 0) оптимальной, с точки зрения производственника, является технология $l(0) = (l_1(0), l_2(0))$, то в дальнейшем (в период $t$) оптимальной, с его точки зрения, будет преобразованная, согласно (11), технология $l(t) = (l_1(t), l_2(t))$.

Теперь обратимся к условию полной занятости информационного ресурса (5). Если первоначально это условие выполнялось, но в дальнейшем социальная технология не меняется, то условие (5) нарушается: отношение $h_1/h_2$ постоянно, тогда как отношение $K(t)/L(t)$ меняется.

Таким образом, технический прогресс при неизменной социальной технологии приводит к рассогласованности: выбор, сделанный бюрократами, не совпадает с выбором производственников. При неизменной социальной технологии бюрократ выбирает оптимальную технологию таким образом, что $\dfrac{l_1(t)}{l_2(t)} = const.$

Применительно к реальной российской ситуации этот результат может объяснить, почему бюрократы придают особую важность демографической проблеме, а не проблеме технического совершенствования производства и почему, в отличие от производственников, они не рассматривают как серьезную проблему недостаток инвестиций. Рост коррупции в экономике может быть результатом расширения рассогласованности. Модель показывает возможный путь решения проблемы рассогласованности: непрерывное изменение социальной технологии.

### Случай двухфакторной функции Кобба—Дугласа

Пусть «глобальная» производственная функция с техническим прогрессом имеет вид (9) (или, что эквивалентно, (10)). Тогда технологическое меню зависит от времени следующим образом:

$$\Lambda(t) = \{(l_1, l_2) : l_1^{\alpha} l_2^{1-\alpha} = \gamma^t A_0\}.$$

Пусть социальная технология $h$ неизменна. Сравним сбалансированные траектории, которые выбрали бы производственник и бюрократ.

*Производственник* выбирает в период времени $t$ технологию $l(t) = (l_1(t), l_2(t))$, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} l_1 K(t) = l_2 L(t), \\ l_1^{\alpha} l_2^{1-\alpha} \left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha} = \gamma^t A_0 \end{cases}.$$

Отсюда находим

$$l_1(t) = \gamma^t A_0 \left( \frac{L(t)}{K(t)} \right)^{1-\alpha},$$

$$l_2(t) = \gamma^t A_0 \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\alpha}.$$

На сбалансированной траектории переменные $Y(t)$, $K(t)$ имеют некоторый постоянный темп роста $\varphi$, а переменная $L(t)$ — заданный темп роста $\beta$. Следовательно, темпы роста леонтьевских производительностей факторов $l_1(t)$, $l_2(t)$ постоянны, обозначим их через $\gamma_1$, $\gamma_2$ соответственно. Выполняются равенства

$$\gamma_1 = \gamma \left( \frac{\beta}{\varphi} \right)^{1-\alpha},$$

$$\gamma_2 = \gamma \left( \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\alpha},$$

$$\gamma_1 \varphi = \gamma_2 \beta,$$

$$\min \{\gamma_1 \varphi, \gamma_2 \beta\} = \varphi.$$

Из последних двух равенств вытекает, что $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 \beta = \varphi$ (т. е. имеет место указанный в предыдущем разделе случай трудодобавляющего технического прогресса, когда прогресс «подтягивает» темп роста эффективного труда до темпа роста экономики). Находим темп роста экономики на сбалансированной траектории:

$$\varphi = \beta \gamma^{1/(1-\alpha)}.$$

Если решение принимает *бюрократ*, то технология $l(t) = (l_1(t), l_2(t))$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} l_1 h_1^{-1} = l_2 h_2^{-1}, \\ l_1^{\alpha} l_2^{1-\alpha} \left(\dfrac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha} = \gamma^t A_0 \end{cases}.$$

Отсюда

$$l_1(t) = \gamma^t A_0 \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{1-\alpha},$$

$$l_2(t) = \gamma^t A_0 \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^{\alpha}.$$

Таким образом, на сбалансированной траектории леонтьевские производительности факторов $l_1(t)$, $l_2(t)$ растут общим постоянным темпом, равным $\gamma$.

Поскольку выпуск, равный

$$\min\{l_1(t)K(t),\ l_2(t)L(t)\},$$

растет темпом φ, выполняется равенство

$$\varphi = \min\{\gamma\varphi,\ \gamma\beta\},$$

откуда следует, что

$$\varphi = \gamma\beta.$$

Таким образом, при неизменной социальной технологии темп роста экономики, управляемой производственником, выше, чем темп роста экономики, управляемой бюрократом. В экономике, управляемой бюрократом, труд является ограничителем роста.

## Образование и экономический рост

Возможная интерпретация изменения социальной технологии $h$ — это *образование* (и соответственно повышение качества) менеджеров-бюрократов. В таком случае полученные результаты говорят о том, что лишь адекватное образование менеджеров позволяет экономике полностью использовать возможности роста, которые открывает технический прогресс.

Впервые подход к экономическому росту как зависящему от образования менеджеров был предложен Р. Нельсоном и Э. Фелпсом (Nelson, Phelps, 1966). Они полагали, что «в технологически развивающейся или динамической экономике производственный менеджмент — это функция, требующая адаптации к изменению, и что чем более образован менеджер, тем быстрее он введет новую технологию производства». В нашей модели образованные менеджеры (которым соответствует измененная социальная технология) вводят физическую технологию, способствующую максимизации выпуска.

Заметим, что в модели Нельсона—Фелпса уровень образования менеджеров фиксируется — это типичный пример модели, в которой институты носят количественный характер и создают «разовый» стимул (или препятствие) экономическому росту. Модель Нельсона—Фелпса получила развитие в (Vandenbussche, Aghion, Meghir, 2006), где уровень образования для обеспечения роста должен соответствовать тому, какой стратегии роста — имитации или инновации — следует страна, а выбор такой стратегии, в свою очередь, зависит от близости к мировой технологической границе. В нашей модели уровень образования менеджеров (социальная технология) должен изменяться по мере движения экономики по траектории роста. Это вполне согласуется с положением Р. Нельсона и Э. Фелпса о том, что «прогрессивность технологии имеет следствия для оптимальной структуры капитала в широком смысле».

## Источники

*Абасов Т. М., Рубинов А. М.* Субдифференциалы некоторых классов негладких функций // Вопросы механики и процессов управления. 1995. Вып. 16. С. 8—18.

*Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М., 1984.

*Аузан А. А.* Общественный договор-2008 // Проблемы экономической теории и политики / под общ. ред. А. П. Заостровцева. СПб., 2006. С. 364—373.

*Заостровцев А. П.* Идеалы конституционной экономики и российская реальность // Актуальные экономические проблемы России / под общ. ред. Л. Э. Лимонова. СПб., 2005. С. 129—157.

*Макаров В. Л.* Исчисление институтов // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39. № 2. С. 14—37.

*Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., 1973.

*Матвеенко В. Д.* Экономические институты и динамика российской экономики. Проблемы экономической теории и политики / под общ. ред. А. П. Заостровцева. СПб., 2006(а). С. 250—274.

*Матвеенко В. Д.* Модели экономической динамики. СПб., 2006(б).

*Полтерович В. М.* Институциональные ловушки и экономические реформы // Экономика и математические методы. 1999. Вып. 35. № 2. С. 3—20.

*Полтерович В. М.* Трансплантация экономических институтов// Экономическая наука современной России. 2001. № 3. С. 24—50.

*Рубинов А. М.* Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л., 1980.

*Тамбовцев В. Л.* Можно ли ожидать улучшения защиты прав собственности в России? // Проблемы экономической теории и политики / под общ. ред. А. П. Заостровцева. СПб., 2006. С. 74—401.

*Фуруботн Э. Г., Рихтер Р.* Институты и экономическая теория: Достижения новой институциональной экономической теории. СПб., 2005.

*Hall R. E., Jones C. I.* Why do some countries produce so much more output per worker than others? // Quarterly Journal of Economics. 1999. Vol. 114. N 1. P. 83—116.

*Jones C. J.* The shape of production function and the direction of technical change // Quarterly Journal of Economics. 2005. Vol. 120. N 2. P. 517—549.

*Matveenko V.* On a dual representation of CRS function by use of Leontief functions. // Proceedings of the 1st International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics. Baku, 1997. P. 160—165.

*Nelson R. R.* What makes an economy productive and progressive? What are the needed institutions? Inaugural Vernon W.Ruttan Lecture on Science and Development Policy, University of Minnesota, 2006.

*Nelson R. R., Phelps E. S.* Investment in humans, technological diffusion, and economic growth // American Economic Review. 1966. Vol. 56 (2). P. 69—75.

*Nelson R., Sampat B.* Making sense of institutions as a factor shaping economic performance // Journal of Economic Behavior and Organization. 2001. Vol. 44. P. 31—54.

*Rubinov A. M., Glover B. M.* Duality for increasing positively homogeneous functions and normal sets // Recherche Operationnele/Operations Research. 1998. Vol. 12. N 2. P. 105—123.

*Vandenbussche J., Aghion P., Meghir C.* Growth, distance to frontier and composition of human capital // Journal of Economic Growth. 2006. Vol. 11 (2). P. 97—127.