Ф. А. Ущев

канд. экон. наук, старший преподаватель кафедры экономической кибернетики и экономико-математических методов Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов

В. П. Чернов

докт. экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики и экономико-математических методов Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ КАПИТАЛА

Во многих моделях экономической динамики капитал рассматривается как однородное благо. Таковы, в частности, известные неоклассические модели экономического роста — модель Солоу (Solow, 1956) и модель Рамсея-Касса-Купманса (Cass, 1965). Аналогичный подход применяется и в моделях микроэкономического характера. В качестве примера можно привести модель гибкого акселератора Эйсснера-Стротца (Eissner, Strotz, 1963).

Во всех перечисленных и многих других динамических моделях экономических систем различного уровня не учитываются даже такие простые особенности структуры капитала, как деление его на основной капитал и оборотный капитал. Это деление, как известно, проводится по признаку длительности периода, в течение которого стоимость капитала полностью переходит в стоимость готовой продукции. Естественно предположить, что попытка учесть неоднородность капитала при моделировании экономической динамики позволила бы получить некоторые дополнительные результаты.

Описание модели

Время в модели предполагается дискретным, т. е. разбитым на отдельные периоды единичной длины, которые далее будем считать равными одному году. Введем следующие обозначения:

- Y_t — валовой выпуск в году t;
- K_t — объем основного капитала в году t;
- H_t — объем оборотного капитала в году t;
- I_t^K Z — объем инвестиций в основной капитал в году t;
- I_t^H Z — объем инвестиций в оборотный капитал в году t;
- C_tZ — объем потребления в году t;
- ν_K Z — коэффициент сохранности основного капитала;
- ν_H Z — коэффициент сохранности оборотного капитала.

Под коэффициентом сохранности понимается доля капитала соответствующего вида, которая не выбывает из производственного процесса вследствие износа. Величины ν_K и ν_H в силу своего экономического смысла удовлетворяют естественным условиям:

© Ф. А. Ущев, В. П. Чернов, 2007

$$0 \leqslant \nu_K, \nu_H \leqslant 1.$$

Технология производства в модели описывается с помощью двухфакторной производственной функции:

$$Y_t = F\left(K_t, H_t\right). \tag{1}$$

Предполагается, что функция F обладает стандартными свойствами, т. е. определена при всех неотрицательных значениях аргументов, принимает неотрицательные значения, является монотонной по каждому аргументу, непрерывной и дифференцируемой, по крайней мере, дважды, на всей области определения, а также вогнутой и линейно однородной.

В модели имеются, по крайней мере, два возможных источника различий между основным и оборотным капиталом. Во-первых, переменные K_t и H_t по-разному входят в производственную функцию (1), что соответствует различному технологическому назначению различных составляющих капитала. Во-вторых, основной капитал, который имеет более длительный срок службы, чем оборотный, обладает более низкой нормой износа и, соответственно, более высоким коэффициентом сохранности. Таким образом, мы считаем, что выполнено неравенство:

$$\nu_H < \nu_K.$$

Выпуск каждого периода делится на потребление и инвестиции в различные виды капитала:

$$Y_t = C_t + I_t^K + I_t^H. \tag{2}$$

Уравнения динамики различных типов капитала имеют вид:

$$K_{t+1} = I_t^K + \nu_K K_t, \tag{3}$$

$$H_{t+1} = I_t^H + \nu_H H_t. \tag{4}$$

Смысл уравнений (3)—(4) состоит в том, что объем капитала в году $t+1$ складывается из двух частей: нового капитала, сформированного за счет инвестиций, сделанных в году t, и старого капитала, не изношенного к концу года t.

Динамика в нашей модели полностью описывается уравнениями (1)—(4).

Уравнение динамики структуры капитала

Предположим дополнительно, что экономика находится на траектории Солоу, т. е. в каждый момент времени t выполнены соотношения:

$$\frac{I_t^K}{Y_t} = s_K, \tag{5}$$

$$\frac{I_t^H}{Y_t} = s_H, \tag{6}$$

где s_K, s_H — не зависящие от времени нормы инвестиций в основной и оборотный капитал, соответственно.

Тогда уравнения (3) — (4) модифицируются следующим образом:

$$K_{t+1} = s_K F\left(K_t, H_t\right) + \nu_K K_t, \tag{7}$$

$$H_{t+1} = s_H F\left(K_t, H_t\right) + \nu_H H_t. \tag{8}$$

Важную роль в дальнейшем анализе будет играть величина оснащенности оборотного капитала основным, т. е. количество единиц основного капитала, приходящееся в среднем на единицу оборотного. Обозначим эту величину через x_t:

$$x_t = \frac{K_t}{H_t}. \tag{9}$$

Соотношение (9) позволяет ввести в рассмотрение производственную функцию в интенсивной форме, связывающую среднюю оснащенность основного капитала оборотным со средней производительностью основного капитала:

$$f\left(x\right) = F\left(x, 1\right). \tag{10}$$

Функция f, определяемая формулой (10), является неотрицательной, монотонно возрастающей и вогнутой при всех неотрицательных x. Эти свойства легко следуют из постулированных выше свойств функции F.

Изучим подробнее поведение переменной x_t, характеризующей структуру капитала.

Деля (7) на (8), получаем:

$$\frac{K_{t+1}}{H_{t+1}} = \frac{s_K F\left(K_t, H_t\right) + \nu_K K_t}{s_H F\left(K_t, H_t\right) + \nu_H H_t}. \tag{11}$$

Разделив числитель и знаменатель дроби в правой части (11) на объем оборотного капитала H_t, приходим к следующему уравнению динамики структуры капитала:

$$x_{t+1} = \frac{s_K f\left(x_t\right) + \nu_K x_t}{s_H f\left(x_t\right) + \nu_H}. \tag{12}$$

Уравнение (12) можно переписать в следующем виде:

$$x_{t+1} = \frac{s_K + \nu_K \dfrac{x_t}{f\left(x_t\right)}}{s_H + \dfrac{\nu_H}{f\left(x_t\right)}}. \tag{13}$$

Представление уравнения динамики структуры капитала в форме (13) полезно в том отношении, что оно позволяет непосредственно установить монотонность функции, стоящей в правой части уравнения (12). Обозначим эту функцию через $\varphi\left(x\right)$:

$$\varphi\left(x\right) = \frac{s_K f\left(x\right) + \nu_K x}{s_H f\left(x\right) + \nu_H} = \frac{s_K + \nu_K \dfrac{x}{f\left(x\right)}}{s_H + \dfrac{\nu_H}{f\left(x\right)}} \tag{14}$$

Функция $\varphi(x)$ представляет собой отношение двух функций, причем числитель возрастает в силу неотрицательности и вогнутости функции f, а знаменатель убывает в силу монотонности f. Таким образом, функция $\varphi(x)$ является монотонно возрастающей.

Существование и единственность стационарной траектории

При анализе динамических моделей особый интерес представляют траектории, обладающие наиболее простым поведением. В нашей модели естественно сосредоточить внимание на анализе траекторий, характеризующихся неизменной структурой капитала. Назовем траекторию стационарной, если $x_t = const$, т. е. структура капитала с течением времени не изменяется.

Обозначим через $\hat{x}$ стационарное значение оснащенности основного капитала оборотным, определяемое как корень уравнения $x = \varphi(x)$. Запишем это уравнение в развернутой форме:

$$s_H f(x) + \nu_H = s_K \frac{f(x)}{x} + \nu_K. \tag{15}$$

Предложение 1. *Пусть функция f неограниченно возрастает. Тогда нетривиальное стационарное состояние $\hat{x}$ существует и единственно.*

Доказательство. Существование и единственность стационарной траектории эквивалентны существованию и единственности решения уравнения (15). Возможны два случая.

Случай 1: $f(0) = 0$. Экономический смысл этой ситуации состоит в том, что производство без основного капитала вообще невозможно. Чтобы исследовать вопрос о существовании корня уравнения (15), устремим x в обеих его частях к нулю. Предел левой части будет равен ν_H, а предел правой части (по правилу Лопиталя) выражается величиной $s_K f'(0) + \nu_K$. В силу того, что коэффициент сохранности основного капитала выше, чем оборотного, а также в силу монотонности функции f, при достаточно малых значениях x имеет место неравенство:

$$s_H f(x) + \nu_H < s_K \frac{f(x)}{x} + \nu_K. \tag{16}$$

С другой стороны, правая часть уравнения (15) представляет собой убывающую функцию, а левая — неограниченно возрастающую функцию. Отсюда следует, что при достаточно больших значениях x выполняется неравенство, противоположное (16). В силу непрерывности функции f корень уравнения (15) существует и единственен.

Случай 2: $f(0) > 0$. Этот случай отвечает предположению, что система может что-то производить, не располагая даже минимальным запасом основного капитала, функционируя лишь за счет оборотного.

Устремляя x к нулю в обеих частях уравнения (15), видим, что правая часть стремится к бесконечности, а левая — к конечной величине $s_K f(0) + \nu_H$. Таким образом, при малых x неравенство (16) выполнено и в этом случае. При достаточно больших значениях x выполнено противоположное неравенство. Таким образом, корень уравнения (15) существует и единственен.

Предложение доказано.

Рисунок 1 иллюстрирует справедливость предложения 1 для случая, когда производственная функция (2) является функцией Кобба-Дугласа:

$$F(K, H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}.$$

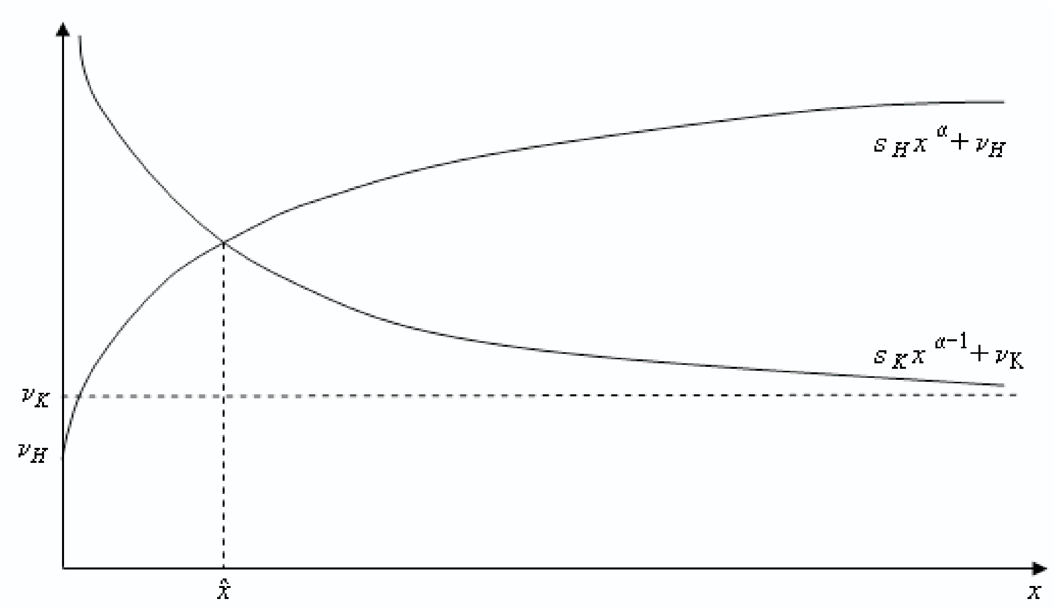

Рис. 1. Существование и единственность стационарной траектории для неограниченной производственной функции: случай производственной функции Кобба-Дугласа

Отметим, что неограниченное возрастание функции f является весьма важным условием, отсутствие которого, вообще говоря, может повлечь за собой отсутствие стационарных траекторий в модели. В качестве примера рассмотрим производственную функцию следующего вида:

$$F(K,H) = \frac{KH}{K+H}. \tag{17}$$

Функция (17) принадлежит к классу функций с постоянной эластичностью замещения (CES). Она имеет эластичность замещения факторов, равную 0.5. Соответствующая производственная функция в интенсивной форме имеет вид:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}. \tag{18}$$

Легко видеть, что функция (18) является ограниченной сверху.

Подставляя функцию (18) в уравнение (15), получаем:

$$s_H \frac{x}{x+1} + \nu_H = \frac{s_K}{x+1} + \nu_K. \tag{19}$$

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$s_H < \nu_K - \nu_H. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) не имеет неотрицательных корней. Это обстоятельство показано на рис. 2.

Неравенство, противоположное (20), является условием существования стационарной траектории в случае, если производственная функция определяется формулой (17). Это условие может быть обобщено на случай любой производственной функции (2), которой соответствует ограниченная функция (10). Введем следующее обозначение:

$$\sup_{x \geqslant 0} f(x) = \sigma.$$

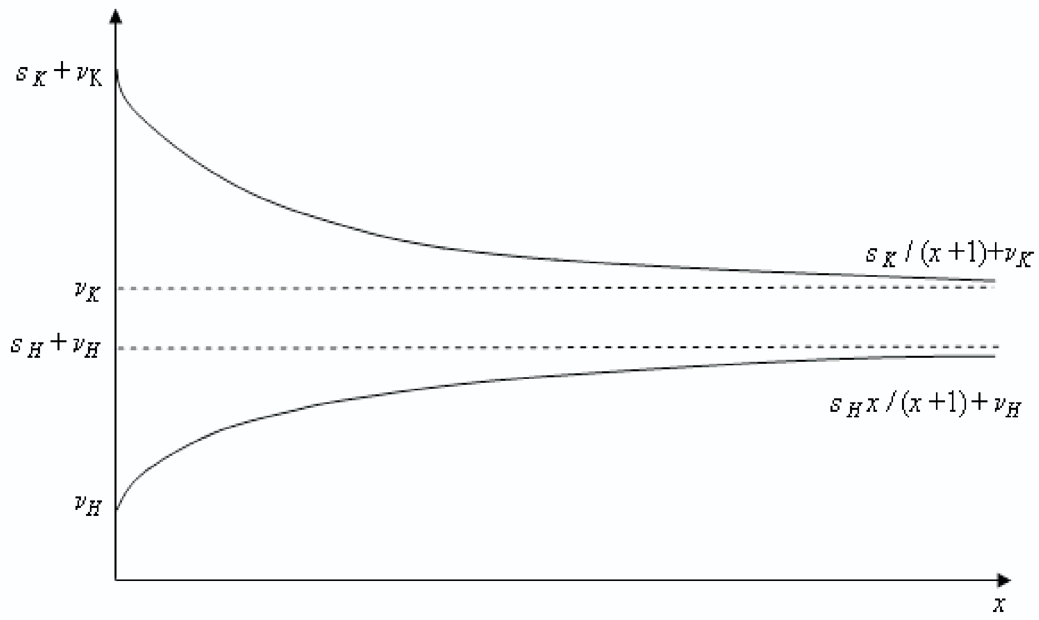

Рис. 2. Возможность отсутствия стационарной траектории для ограниченной производственной функции: случай функции класса CES

Стационарная траектория в модели (1) — (6) существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:

$$\lim_{x\to\infty}\left[s_H f(x)+\nu_H\right] > \lim_{x\to\infty}\left[s_K \frac{f(x)}{x}+\nu_K\right]. \tag{21}$$

В случае, когда функция f ограничена, неравенство (21) после элементарных преобразований принимает вид:

$$s_H > \frac{\nu_K-\nu_H}{\sigma}. \tag{22}$$

Этот результат имеет прозрачную экономическую интерпретацию. Оборотный капитал, включающий в себя материальные запасы, незавершенное производство, денежные средства, дебиторскую задолженность и т. д., выполняет в экономике стабилизирующую функцию. Наличие достаточного запаса оборотного капитала повышает гибкость, надежность, устойчивость функционирования хозяйственной системы. Условие (22) говорит о том, что отсутствие стационарных траекторий имеет место как раз при малых значениях s_H, т. е. при недостаточном уровне инвестиций в оборотный капитал.

В модели (1)—(6) оборотный капитал отличается от основного только более высокой скоростью износа. Таким образом, достаточно высокие инвестиции в быстро изнашивающийся капитал оказываются ключевым фактором существования стационарных траекторий.

Устойчивость стационарной траектории

Следующим логически закономерным вопросом, требующим исследования, является вопрос об устойчивости стационарной траектории в тех случаях, когда она существует.

Предложение 2. *Предположим, что стационарная траектория в модели (1)—(6) существует. Тогда она глобально устойчива.*

Доказательство. Перепишем уравнение динамики структуры капитала (12) с учетом формулы (14):

$$x_{t+1} = \varphi(x_t). \tag{23}$$

Докажем сначала, что если стационарная траектория $\hat{x}$ существует, то выполнены следующие неравенства:

$$\varphi(x) > x, \text{ если } x < \hat{x}, \tag{24}$$

$$\varphi(x) < x, \text{ если } x > \hat{x}. \tag{25}$$

Докажем неравенство (24).

Если $f(0) > 0$, то $\varphi(0) > 0$, что проверяется непосредственной подстановкой.

Если $f(0) = 0$ и $\nu_H = 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \frac{s_K}{s_H} + \frac{\nu_K}{s_H f'(0)} > 0.$$

Если, наконец, $f(0) = 0$ и $\nu_H = 0$, то убедимся в справедливости (24) в малой окрестности нуля, вычислив производную функции φ в точке x=0:

$$\varphi'(0) = \frac{s_K f'(0) + \nu_K}{\nu_H} > 1.$$

Таким образом, неравенство (24) справедливо при малых значениях x. В силу единственности стационарной траектории и непрерывности функции φ оно автоматически оказывается справедливым для всех x, меньших $\hat{x}$.

Перейдем к доказательству неравенства (25). Здесь следует различать случаи, когда функция f неограниченна и когда она ограничена.

Если функция f неограничена, то при достаточно больших значениях x имеет место цепочка неравенств:

$$\varphi(x) < \frac{s_K + \nu_K \dfrac{x}{f(x)}}{s_H} < \frac{s_K}{s_H} + \frac{\nu_K}{s_H \gamma} x < x.$$

Здесь γ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{\nu_K}{s_H \gamma} < 1.$

Пусть теперь функция f ограничена. Тогда должно быть выполнено условие (22) существования стационарной траектории. Выберем достаточно малые положительные числа ε и δ таким образом, чтобы были выполнены неравенства:

$$\nu_K + \delta < s_H \sigma + \nu_H,$$
$$\delta > s_H \varepsilon.$$

При достаточно больших значениях x верна следующая цепочка неравенств:

$$\varphi(x) < \frac{s_K(\sigma - \varepsilon) + \nu_K x}{s_H(\sigma - \varepsilon) + \nu_H} < \frac{s_K(\sigma - \varepsilon) + \nu_K x}{\nu_K + \delta - s_H \varepsilon} < x.$$

Таким образом, неравенство (25) справедливо при достаточно больших значениях x. В силу единственности стационарной траектории и непрерывности функции φ оно автоматически оказывается справедливым для всех x, больших $\hat{x}$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости стационарной траектории.

Предположим, что оснащенность оборотного капитала основным в некоторый момент t оказалась ниже стационарного значения:

$$x_t < \hat{x}.$$

Тогда в силу монотонности функции φ и неравенства (24) $x_t < x_{t+1} < \hat{x}$. Тем самым траектория функционирования системы представляет собой монотонно возрастающую последовательность, ограниченную сверху стационарным значением структурного параметра $\hat{x}$. Такая последовательность, как известно, имеет предел. В силу единственности стационарной траектории этим пределом может быть только $\hat{x}$.

Аналогичным образом на основе неравенства (25) устанавливается сходимость экономической системы к стационарной траектории в случае, когда $x_t > \hat{x}$. Это означает, что сходимость имеет место из произвольного начального состояния.

Предложение доказано.

На рис. 3 изображен процесс монотонной сходимости структуры капитала к стационарному режиму.

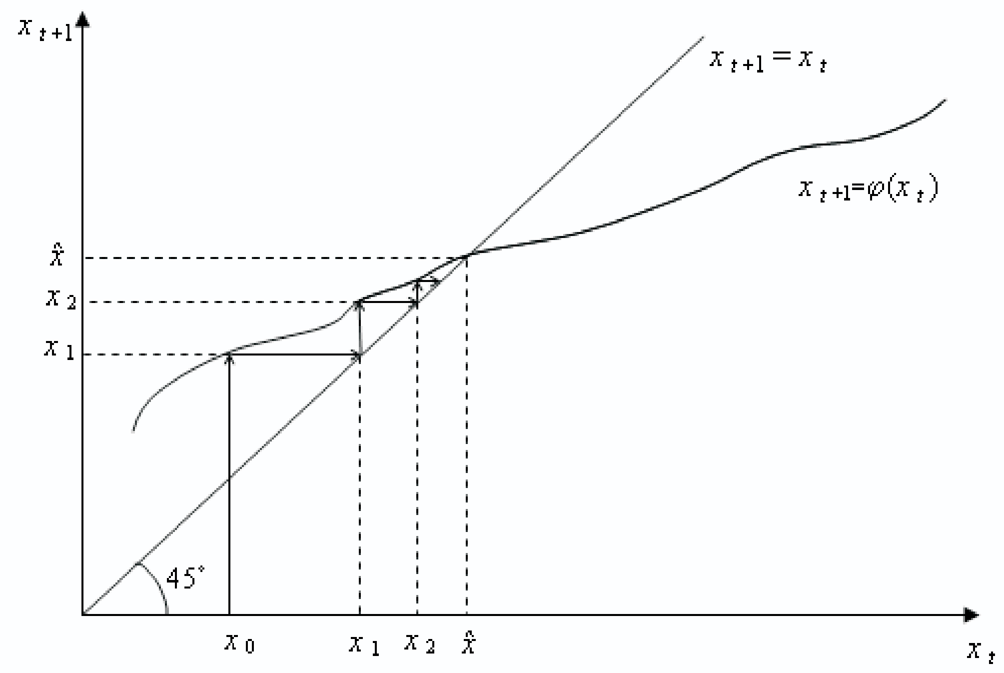

Рис. 3. Сходимость структуры капитала к стационарному режиму

Сбалансированный рост

Назовем траекторией сбалансированного роста такую траекторию, на которой все переменные модели растут с постоянным темпом, причем этот темп роста одинаков для всех переменных.

Предложение 3. *Предположим, что стационарная траектория в модели (1) — (6) существует. Тогда экономическая система сходится к траектории сбалансированного роста.*

Доказательство. Обозначим темпы роста объемов основного и оборотного капитала через G_t^K и G_t^H, соответственно. Тогда из (7), (8) и (10) следуют формулы:

$$G_t^K = \frac{K_{t+1}}{K_t} = s_K \frac{f(x_t)}{x_t} + \nu_K, \tag{26}$$

$$G_t^H = \frac{H_{t+1}}{H_t} = s_H f(x_t) + \nu_H. \tag{27}$$

Для темпа роста валового выпуска, который мы обозначим посредством G_t^Y, в силу линейной однородности производственной функции имеет место формула:

$$G_t^Y = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = G_t^H \frac{f(x_{t+1})}{f(x_t)}. \tag{28}$$

Правые части формул (26) и (27) совпадают, соответственно, с левой и правой частями уравнения (15), из которого определяется стационарное значение оснащенности оборотного капитала основным. Поскольку стационарная траектория глобально устойчива, величины G_t^K, G_t^H и G_t^Y с течением времени сходятся к одному и тому же значению. Предложение доказано.

Любопытно установить связь темпа сбалансированного роста с управляющими параметрами. Обозначим темп сбалансированного роста посредством $\hat{G}$. Легко видеть, что эта величина вычисляется по формуле:

$$\hat{G} = s_H f(\hat{x}) + \nu_H. \tag{29}$$

Формула (29) говорит о том, что предложенная модель, в отличие, например, от модели Солоу, является моделью эндогенного роста (Romer, 1996, Матвеенко, Гуревич, 2000): темп роста на сбалансированной траектории в этой модели зависит от норм инвестирования.

Условия достижения максимального темпа роста

Поскольку в моделях эндогенного роста темп сбалансированного роста зависит от параметров управления (в частности, норм инвестиций), при анализе моделей эндогенного роста уместно ставить вопрос о наличии максимально возможного темпа роста и условиях его достижения. В данном пункте этот вопрос изучается применительно к модели с двумя видами капитала.

Предложение 4. *В модели (1) — (6) существует максимально возможный темп сбалансированного роста, который достигается при условии равенства норм инвестиций в основной и оборотный капитал эластичностям производственной функции (2) по этим факторам.*

Доказательство. Речь идет о максимизации функции $\hat{G}(s_K, s_H)$, определяемой уравнением (29), на множестве пар (s_K, s_H), которое задается соотношениями:

$$s_K + s_H \leqslant 1,$$
$$s_K, s_H \geqslant 0.$$

Так как это множество ограничено и замкнуто, а функция $\hat{G}(s_K, s_H)$ непрерывна, максимум существует. Тем самым первая часть предложения 4 доказана.

Уравнение (15) задает неявную функцию $\hat{x}\left(s_K, s_H\right)$. Частные производные этой функции определяются формулами:

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial s_H}=-\frac{\hat{x}^2}{\hat{x}\, s_H\, \alpha\left(\hat{x}\right)+s_K\left[1-\alpha\left(\hat{x}\right)\right]}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial s_K}=\frac{\hat{x}}{\hat{x}\, s_H\, \alpha\left(\hat{x}\right)+s_K\left[1-\alpha\left(\hat{x}\right)\right]}. \tag{31}$$

Видим, что стационарное значение параметра структуры капитала убывает по s_{H} и возрастает по s_{K}.

Задача определения значений s_K, s_H, при которых достигается максимальный темп роста в модели (1) — (6), эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$\begin{gathered} s_H f\left(\hat{x}\right) \to \max, \\ s_K+s_H=1. \end{gathered} \tag{32}$$

Составим функцию Лагранжа для задачи (32):

$$\Lambda=s_H f\left(\hat{x}\right)-\lambda\left(1-s_K-s_H\right). \tag{33}$$

Приравнивая частные производные функции (33) к нулю, получаем необходимые условия оптимальности:

$$f'\left(\hat{x}\right)\frac{\partial \hat{x}}{\partial s_K} s_H=f\left(\hat{x}\right)+f'\left(\hat{x}\right)\frac{\partial \hat{x}}{\partial s_H} s_H=\lambda. \tag{34}$$

Используя формулы (30), (31) и (34), после преобразований приходим к равенству:

$$f\left(\hat{x}\right)=s_H\left(\hat{x}+1\right)\frac{\hat{x}\, f'\left(\hat{x}\right)}{\hat{x}\, s_H \alpha\left(\hat{x}\right)+s_K\left[1-\alpha\left(\hat{x}\right)\right]}, \tag{35}$$

где $\alpha\left(x\right)$ — эластичность выпуска по объему основного капитала, определяемая по формуле:

$$\alpha\left(x\right)=\frac{x\, f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}. \tag{36}$$

Разделив обе части (35) на $f\left(\hat{x}\right)$ и используя формулу (36), приведем необходимое условие оптимальности к виду:

$$\frac{\hat{x}+1}{\hat{x}+\dfrac{s_K}{s_H}\dfrac{1-\alpha\left(\hat{x}\right)}{\alpha\left(\hat{x}\right)}}=1. \tag{37}$$

Равенство (37) выполнимо лишь тогда, когда второе слагаемое в знаменателе равно единице. Таким образом, окончательный вид условия оптимальности следующий:

$$\frac{s_K}{s_H} = \frac{\alpha\left(\hat{x}\right)}{1-\alpha\left(\hat{x}\right)}. \tag{38}$$

Итак, нормы инвестиций в основной и оборотный капитал пропорциональны эластичностям выпуска по объемам основного и оборотного капитала, соответственно. Поскольку в действительности $s_K + s_H = 1$, а сумма коэффициентов эластичности производственной функции (2) также равна единице в силу постоянной отдачи от масштаба, пропорциональность превращается в равенство.

Предложение доказано.

Отметим, что полученный результат представляет собой обобщение известного «золотого правила накопления» на случай неоднородного капитала.

Условие достижения максимального темпа роста может быть эквивалентным образом сформулировано в терминах предельных производительностей основного и оборотного капитала. Обозначим темп прироста экономики на сбалансированной траектории посредством $\hat{g}$. Эта величина связана с темпом сбалансированного роста следующим очевидным соотношением:

$$\hat{G} = 1 + \hat{g}.$$

С учетом формул (15), (26), (27) и (38) получаем:

$$\hat{g} = f'\left(\hat{x}\right) - \mu_K = f\left(\hat{x}\right) - \hat{x}\, f'\left(\hat{x}\right) - \mu_H. \tag{39}$$

Смысл соотношения (39) состоит в том, что максимально достижимый темп прироста на сбалансированной траектории совпадает с уровнем реальной доходности каждого вида капитала. При условии совершенной конкуренции на рынках капитала эта доходность совпадает с предельной производительностью капитала данного вида за вычетом износа. Формулы $\frac{\partial F}{\partial K} = f'\left(x\right)$ и $\frac{\partial F}{\partial H} = f\left(x\right) - x\, f'\left(x\right)$ непосредственно следуют из предположения о постоянной отдаче от масштаба производства (см., например, Romer, 1996).

Заключение

В статье описана и исследована простая модель экономической динамики, учитывающая тот факт, что для функционирования экономической системы любого уровня необходимо использование, по крайней мере, двух видов капитала, различающихся сроком полезного использования и имеющих разные технико-экономические функции.

Полученные в статье модельные результаты допускают возможность других содержательных интерпретаций. Так, два вида капитала можно трактовать не только как основной и оборотный, но и, например, как физический и человеческий капитал (Mankiw, Romer, Weil, 1992). Принципиально иное направление использования модели с двумя видами капитала разработано в (Бетилгириев, Чернов, Эйсснер, 2003), где речь идет не о различных видах производственного капитала, а о различных аспектах потенциала развития экономической системы, среди которых выделяются внутренний (собственный) потенциал и внешний (интеграционный).

Наконец, следует заметить, что интересным направлением дальнейших исследований представляется анализ несбалансированных траекторий модели, переходных режимов динамики, траекторий, отвечающих различным типам управляющих воздействий, а не только тех вариантов динамики, которые характеризуются постоянными нормами инвестиций.

Источники

Бетилгириев М. А., Чернов В. П., Эйсснер Ю. Н. Моделирование интеграции хозяйственных систем. СПб., 2003.

Матвеенко В. Д., Гуревич А. М. Модели эндогенного роста, их развитие и перспективы // Экономические исследования: теория и приложения. 2000. № 1. С. 260—295.

Чернов В. П., Эйсснер Ю. Н. Математическое моделирование экономических процессов. СПб., 2004.

Cass D. Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem // Econometrica. 1965. Vol. 34. P. 833—850.

Eisner R., Strotz R.H. Determinants of Business Investment. Commission of Money and Credit. Impacts of Monetary Policy. Englewood Cliffs (N.J.), 1963.

Mankiw N.G., *Romer D.*, *Weil D.N.* A Contribution to the empirics of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1992. Vol. 107. P. 407—437.

Romer D. Advanced Macroeconomics. London, 1996.

Solow R. A Contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. P. 65—94.