Ю. М. Васильев
ведущий программист лаборатории методов оптимизации и искусственного интеллекта; старший преподаватель кафедры прикладной математики и экономико-математических методов Санкт-Петербургского государственного экономического университета

Г. М. Фридман
докт. техн. наук, профессор, заведующий лабораторией методов оптимизации и искусственного интеллекта; заведующий кафедрой прикладной математики и экономико-математических методов Санкт-Петербургского государственного экономического университета

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗМЕЩЕНИИ КОНТЕЙНЕРОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПЛАТФОРМАХ

Введение

Одной из ключевых задач организации работ на грузовой железнодорожной станции является задача размещения контейнеров на железнодорожных платформах, из которых формируется грузовой состав. Существует большое число различных моделей платформ, и, в зависимости от модели, на платформу допустимо устанавливать от одного до четырех контейнеров, каждый из которых должен быть размещен на определенной, заранее фиксированной позиции.

При размещении контейнеров на платформы необходимо учитывать:

- множество требований к значениям характеристик контейнеров (таких как масса, длина, состояние и т. п.), связанных с постановкой контейнеров на конкретную модель платформы (Приказ Министерства транспорта РФ от 18 декабря 2019 г. № 405);
- ограниченное количество платформ для размещения на них контейнеров;
- специфичные требования к отправке контейнеров.

На практике диспетчер, управляющий размещением контейнеров на платформы, должен за короткое время сформировать допустимый план установки контейнеров, обладающий достаточно высокими характеристиками с точки зрения экономической эффективности. В частности, одна из таких характеристик связана с необходимостью разместить как можно больше контейнеров, использовав при этом грузовой состав с как можно меньшим числом платформ.

С ростом числа платформ, их моделей, количества размещаемых контейнеров и требований к их установке область допустимых решений задачи становится настолько большой, что без использования оптимизационных подходов невозможно получить хоть сколько-нибудь качественное решение.

Цель исследования — разработка точной математической модели для решения задачи о назначении контейнеров на платформы, позволяющей находить размещение контейнеров на платформах для полномасштабных исходных данных за ограниченные временные ресурсы с учетом заданных критериев оптимизации.

Актуальность и практическая значимость темы исследования подтверждается, в том числе, большим количеством публикаций, посвященных решению различных вариантов описанной задачи.

В обзоре (Heggen, Braekers, Caris, 2016) приведены и проанализированы многочисленные математические постановки задачи размещения контейнеров на железнодорожных платформах. Такое разнообразие объясняется наличием специфических

DOI 10.31085/1814-4802-2024-20-3-144-89-101 © Ю. М. Васильев, Г. М. Фридман, 2024

требований и условий, которые приняты в различных логистических компаниях и различных странах. Разнообразие постановок сочетается с большим числом подходов к решению задачи и получению числовых результатов. Эти подходы можно разделить с точки зрения используемых в них алгоритмов на точные, эвристические и гибридные (в которых сочетаются первые два типа).

В работе (Bruck, Cordeau, Frejinger, 2021) исследована задача, связанная с оптимальным разделением грузового состава на сцепки платформ и поиска наилучших, с точки зрения логистических операций, участков железнодорожных путей, где эти сцепки долны быть размещены для выполнения операций погрузки. При этом определяется распределение грузовых составов по путям отправки с учетом сформулированных технических требований. Метод, примененный в (Bruck, Cordeau, Frejinger, 2021) для решения задачи, основан на двухшаговой математической эвристике (Maniezzo, Stützle, Voß, 2021). На первом ее шаге использована модель смешанного программирования (Мину, 1990), с помощью которой формируются варианты разбиения прибывшего грузового состава на сцепки и распределения этих сцепок по путям погрузки. На втором шаге матэвристики, также на основе модели смешанного программирования, выбираются наилучшие варианты разбиения с одновременным назначением контейнеров для погрузки на платформы, входящие в каждую сцепку.

Смешанное программирование для решения задачи о размещении контейнеров на платформы применено, например, в следующих статьях:

- в работе (Mantovani et al., 2018) рассмотрены платформы, на которых можно размещать контейнеры в один или два ряда. В рамках точной оптимизационной модели выбирается подмножество контейнеров для погрузки на платформах и оптимальный способ их размещения. Кроме того, учтены ограничения, связанные с нагрузкой, которую оказывают контейнеры на оси платформы;
- в работе (Ruf, Cordeau, Frejinger, 2022) была предложена точная модель, генерирующая план работ по размещению контейнеров с учетом маршрутизации погрузочной техники. Приведенные числовые результаты продемонстрировали сокращение затрат на перемещение контейнеров в среднем на 16,5% по сравнению с решением эксперта, при условии, что исходные данные содержат не более, чем 50 контейнеров. Временные затраты на получение результатов не превосходят 20 минут.

Другим подходом к решению задачи являются алгоритмы, сочетающие точные и эвристические методы. (Anghinolfi, Caballini, Sacone, 2014) сформулировали оптимизационную задачу для определения наилучшего плана погрузки с точки зрения максимизации количества загружаемых контейнеров и минимизации числа операций, необходимых для их погрузки на платформы. В статье рассмотрены некоторые специфические ограничения, связанные с технологическими особенностями процесса погрузки. Гибридный алгоритм применен в статье (Heggen, Braekers, Caris, 2018), в которой рассмотрена многокритериальная оптимизационная задача формирования плана загрузки грузовых составов. В рамках предложенного подхода использован метод последовательных уступок (Бродецкий, 2009) и алгоритм локальной оптимизации (Ausiello, Crescenzi, Gambosi, Kann, Marchetti-Spaccamela, Protasi, 2012).

Эвристические алгоритмы также получили широкое применение в задачах о размещении контейнеров на платформах: например, (Rathi, Upadhyay, 2022) разработали эвристический алгоритм по укладке контейнеров в два ряда на каждой платформе, причем целевая функция, в том числе, минимизирует расстояние, которое должны преодолеть погрузчики при перемещении контейнеров от стеков на платформы.

Основные отличия представленной ниже математической модели от тех, которые содержатся в упомянутых статьях, состоят в том, что в ней:

- описан процесс размещения контейнеров на железнодорожные платформы, учитывающий все принятые в России требования по размеру, массе, классам опасности груза и т. п.;
- учтено, за счет используемой иерархии критериев оптимизации, возможное присутствие в исходных данных партий контейнеров, а также приоритетов по контейнерам и платформам.

Особенность предложенной математической модели заключается в разбиении процесса поиска решения на два шага, на первом из которых генерируется множество допустимых размещений контейнеров на платформах, а на втором осуществляется выбор оптимального подмножества из множества допустимых размещений. Такой подход существенно ускоряет поиск оптимального решения задачи.

Описание задачи

Дано множество платформ P на железнодорожных путях для размещения на них и отправки множества контейнеров C.

Для каждой платформы $p \in P$ определены:

- длина платформы l_p;
- модель платформы $m_p \in M$, где M — множество моделей платформ.

Множество платформ P разбито на два непересекающихся подмножества:

- множество платформ $P^{(0)} \subset P$ «обязательных к отправке» (на таких платформах должен быть обязательно размещен хотя бы один контейнер);
- множество платформ $P^{(1)} = P \setminus P^{(0)}$, которые необязательны к отправке.

Для каждой платформы $p \in P^{(1)}$ из множества платформ, необязательных к отправке, задан приоритет для отправки — $t_p \in \{1, ..., T\}$, где T — число приоритетов для всех платформ. Чем выше приоритет отправки платформы $p \in P^{(1)}$ (в случае необходимости использования платформ из множества $P^{(1)}$), тем меньше значение t_p, его характеризующее. Множество платформ с приоритетом t обозначим как $P_t^{(1)}$ ($t \in \{1, ..., T\}$).

Каждая модель платформы $m \in M$ характеризуется множеством вариантов A_m размещения на ней контейнеров.

Каждый вариант размещения контейнеров $a \in A_m$ представляет собой набор правил (требований к количеству и характеристикам контейнеров), которые определяют:

- количество контейнеров, на которое рассчитана модель платформы (в соответствии с ее длиной) $n_{m,a}$ при выбранном варианте размещения;
- требуемую длину контейнера для постановки его на i-ю позицию при выбранном варианте размещения $l_{m,a,i}$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}$;
- требуемое состояние контейнера для постановки его на i-ю позицию при выбранном варианте размещения $f_{m,a,i}$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}$;
- множество классов опасности грузов $d_{m,a,i} \subset D$, запрещающих размещать контейнер с таким грузом на i-ю позицию при выбранном варианте размещения a, где D — множество всех классов опасности грузов, а $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}$;
- простые требования к массе контейнеров для постановки на модель платформы при выбранном варианте размещения:
  - общая допустимая масса контейнеров для постановки на платформу должна находиться в диапазоне $[w_{m,a}^{min}; w_{m,a}^{max}]$;

- допустимая масса контейнера для постановки его на i-ю позицию на платформу должна находиться в диапазоне $[w_{m,a}^{min}; w_{m,a}^{max}]$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}$;
- общая допустимая масса контейнеров на позициях $I \subset \{1, ..., n_{m,a}\}$, (при этом $2 \leqslant |I| \leqslant n_{m,a} - 1$) для постановки на платформу должна находиться в диапазоне $[w_{m,a}^{min}; w_{m,a}^{max}]$;
- допустимая абсолютная разность масс для пары контейнеров на позициях i и j для постановки на платформу должна находиться в диапазоне $[\delta_{m,a,i,j}^{min}; \delta_{m,a,i,j}^{max}]$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}, j \in \{1, ..., n_{m,a}\}$ при этом $i < j$;
- контейнер с наименьшей массой должен располагаться на одной из позиций $I^{min} \subset \{1, ..., n_{m,a}\}$, т. е.

$$\underset{i \in \{1,\ldots,n_{m,a}\}}{\operatorname{argmin}} \; w_i \in I^{min},$$

  где w_i — вес контейнера на i-й позиции;
- контейнер с наибольшей массой должен располагаться на одной из позиций $I^{max} \subset \{1, ..., n_{m,a}\}$, т. е.

$$\underset{i \in \{1,\ldots,n_{m,a}\}}{\operatorname{argmax}} \; w_i \in I^{max},$$

  где w_i — вес контейнера на i-й позиции.

- требования типа (*если... то...*) к массе контейнеров для постановки на платформу модели m при выбранном варианте размещения a: при условии, что массы контейнеров попадают в некоторый допустимый диапазон, накладываются дополнительные ограничения на массы контейнеров, расположенных на определенных позициях (на отдельные массы, их сумму, разность и т. п.). Количество требований типа (*если... то...*) для платформы модели m при выбранном варианте размещения a равно $r_{m,a}$. Каждое требование вида (*если... то...*) состоит из двух частей, части «*если*» и части «*то*», причем каждая часть представляет собой набор требований к характеристикам контейнеров;
- варианты условий ограничения $k \in \{1, ..., r_{m,a}\}$ для части *type*, где *type* $\in$ {*если, то*}:
  - общая масса контейнеров для постановки на платформу модели m при выбранном варианте размещения a должна находиться в диапазоне $[w_{m,a,k}^{type,min}; w_{m,a,k}^{type,max}]$;
  - масса контейнера для постановки его на i-ю позицию на платформу модели m при выбранном варианте размещения a должна находиться в диапазоне $[w_{m,a,k,i}^{type,min}; w_{m,a,k,i}^{type,max}]$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}$;
  - абсолютная разность масс для пары контейнеров на позициях i и j для постановки на платформу модели m при выбранном варианте размещения a должна находиться в диапазоне $[\delta_{m,a,k,i,j}^{type,min}; \delta_{m,a,k,i,j}^{type,max}]$, где $i \in \{1, ..., n_{m,a}\}, j \in \{1, ..., n_{m,a}\}$ при этом $i < j$.

Каждый контейнер $c \in C$ характеризуется:

- длиной l_c;
- массой w_c;
- состоянием f_c;

- множеством $d_c \subset D$ классов опасности груза, находящегося внутри контейнера. Если груз в контейнере не характеризуется ни одним классом опасности, то $d_c = \emptyset$;
- приоритет для отправки контейнера $o_c \in \{1, ..., O\}$, где O — число приоритетов для всех контейнеров, чем приоритет отправки контейнера выше, тем меньше значение его характеризующее;
- номер партии $b_c \in \{1, ..., B\}$, где B — число партий для всех контейнеров.

Обозначим множество контейнеров с приоритетом o как $C_o^{(1)}$ ($o \in \{1, ..., O\}$), а множество контейнеров с партией b как $C_b^{(2)}$ ($b \in \{1, ..., B\}$). Для каждой партии $b \in \{1, ..., B\}$ задан параметр $block_b \in \{0,1\}$, при этом значение параметра равно единице, если партия контейнеров $C_o^{(1)}$ должна быть размещена на платформах целиком или не подлежит отправке вовсе, в противном случае параметр принимает значение нуль.

Необходимо найти расстановку контейнеров на платформах, учитывая следующие критерии оптимизации:

- минимизация числа невыполненных «мягких» ограничений (Kendall, 1975);
- максимизация количества контейнеров, помещенных на платформы, по возрастанию приоритета;
- минимизация количества задействованных платформ из множества $P^{(1)}$ по убыванию приоритета;

при удовлетворении следующих «жестких» ограничений:

- расстановка контейнеров должна удовлетворять условиям на допустимые значения массы контейнеров и их длину для каждой платформы;
- расстановка контейнеров должна удовлетворять условиям по классам опасности груза: при размещении контейнера на платформу, непустое множество классов опасности груза, находящегося внутри контейнера, не должно пересекаться с множеством классов опасности груза, запрещенных для выбранного варианта размещения контейнеров;
- партия контейнеров $C_b^{(2)}$, где $b \in \{1, ..., B\} : block_b = 1$ должна быть размещена на платформах целиком или не подлежит отправке вовсе;
- на каждой платформе $p \in P$ могут располагаться контейнеры одной и только одной партии;

а также с учетом «мягких» ограничений:

- на каждой платформе из множества $P^{(0)}$ должен быть размещен как минимум один контейнер.

Термин «жесткое» в применении к некоторому ограничению означает, что его следует обязательно выполнить, в противном случае найденное решение не будет допустимым. Если ограничение «мягкое», то возможно его нарушение, однако каждое такое нарушение нежелательно и их число должно быть уменьшено, в частности за счет введения штрафов.

Формирование допустимых подмножеств контейнеров

Будем считать, что две платформы $p_1, p_2 \in P^{(0)} : p_1 \neq p_2$ из множества обязательных к отправке платформ одинаковые, если обе эти платформы одной модели: $m_{p_1} = m_{p_2}$.

Также будем считать, что две платформы $p_1, p_2 \in P^{(0)} : p_1 \neq p$ из множества необязательных к отправке платформ одинаковые, если обе эти платформы одной модели и обе характеризуются одним и тем же значением приоритета: $m_{p_1} = m_{p_2} \wedge t_{p_1} = t_{p_2}$.

Создадим множество типов платформ $\hat{P}^{(0)}$ такое, что для любого типа платформы $\hat{p} \in \hat{P}^{(0)}$ существует хотя бы одна обязательная к отправке платформа той же модели, $\exists\, p \in P^{(0)} \;:\; m_{\hat{p}} = m_p$, при этом все элементы множества $\hat{P}^{(0)}$ (модели платформ) уникальны, $\nexists\, \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \hat{P}^{(0)} : m_{\hat{p}_1} = m_{\hat{p}_2}$. Аналогично, введем множество типов платформ $\hat{P}^{(1)}$ такое, что для любого типа платформы $\hat{p} \in \hat{P}^{(1)}$ существует хотя бы одна платформа, необязательная к отправке, той же модели и с тем же значением приоритета: $\exists\, p \in P^{(1)} \;:\; m_{\hat{p}} = m_p \wedge t_{\hat{p}} = t_p$, при этом все элементы множества $\hat{P}^{(1)}$ уникальны: $\nexists\, \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \hat{P}^{(1)} \;: m_{\hat{p}_1} = m_{\hat{p}_2} \wedge t_{\hat{p}_2} = t_{\hat{p}_2}$.

Для каждого типа платформы $\hat{p} \in P^{(0)} \cup P^{(1)}$ определим в множестве P количество платформ модели $m_{\hat{p}}$, и, если $\hat{p} \in P^{(1)}$, имеющих значение приоритета $t_{\hat{p}}$. Это количество платформ обозначим $dupl_{\hat{p}}$.

Будем считать, что контейнеры c_1 и c_2 ($c_1, c_2 \in C$) одинаковые, если все их характеристики (масса, длина, состояние, классы опасности, партия, приоритет) совпадают. Набор характеристик каждого подмножества, состоящего из одинаковых контейнеров, формирует контейнер определенного типа $\hat{c}$. Создадим множество уникальных типов контейнеров $\hat{C}$ и для каждого типа контейнеров $\hat{c} \in \hat{C}$ определим $C_{\hat{c}}$ как множество контейнеров с характеристиками, совпадающими с $\hat{c}$. Мощность этого множества $C_{\hat{c}}$ обозначим через $dupl_{\hat{c}}$.

Обозначим множество возможных подмножеств контейнеров как SC (с учетом ограничения о том, что на платформе должны располагаться контейнеры одной и только одной партии). Для каждого подмножества $sc \in SC$ известно множество контейнеров C_{SC}, которые входят в эту расстановку. При этом число контейнеров n_{SC} в этом подмножестве C_{SC} обязано находиться в диапазоне от наименьшего до наибольшего числа контейнеров, в соответствии с вариантом размещения на данной модели платформы:

$$\min_{p \in P, a \in A_{m_p}} n_{m_p,a} \le n_{sc} \le \max_{p \in P, a \in A_{m_p}} n_{m_p,a},\ \forall sc \in SC,\ \in n_{sc} = \left|C_{sc}\right|.$$

Отметим, что в статье $|\cdot|$ обозначает как мощность множества, так и абсолютное значение числовых выражений.

Создадим множество мультимножеств типов контейнеров $\widehat{SC}$, такое что все подмножества в нем уникальны с точки зрения содержащихся в них наборов типов контейнеров. Под термином «мультимножество» будем понимать множество, допускающее вхождение в него одного и того же элемента по нескольку раз (Knuth, 2014). Это множество может быть создано за счет замены контейнеров в каждом элементе множества SC (который представляет собой подмножество контейнеров) на соответсвующие им типы контейнеров из $\hat{C}$:

$$\widehat{SC} = \left\{ (\hat{c} \in \hat{C} : c \in C_{\hat{c}})_{\forall c \in sc} \right\}_{\forall sc \in SC}.$$

Для каждого типа контейнеров $\hat{c} \in \hat{C}$ определим $\widehat{SC}_{\hat{c}} \subset \widehat{SC}$ как множество мультимножеств типов контейнеров, таких что в каждом из этих мультимножеств содержится хотя бы один тип контейнера $\hat{c} : \hat{c} \in \widehat{sc}\ \forall \widehat{sc} \in \widehat{SC}_{\hat{c}}$.

Обозначим через $\widehat{M}$ множество всех моделей платформ, которые представлены в исходных данных, $\widehat{M} = \left\{ m_{\hat{p}} : \hat{p} \in \widehat{P}^{(0)} \cup \widehat{P}^{(1)} \right\}$. Для каждой модели платформы $m \in \widehat{M}$ из этого множества введем множество $\widehat{SC}_m$ допустимых размещений контейнеров на ней, $\widehat{SC}_m \subset \widehat{SC}$. Для каждого мультимножества $\widehat{sc} \in \widehat{SC}_m$ должна существовать хотя бы одна перестановка контейнеров, при которой ограничения на длину контейнеров, их массы и классы опасности груза удовлетворены, исходя из вариантов допустимых размещений A_m. Отметим, что под перестановкой типов контейнеров понимается мультимножество контейнеров с фиксированным порядком их расположения на платформе. Если такая перестановка для $\widehat{sc} \in \widehat{SC}_m$ найдена, то мультимножество типов контейнеров является допустимым для размещения на любой платформе модели m.

Чтобы сформировать множество допустимых размещений контейнеров на платформу модели $m \in \widehat{M}$, которое соответствует допустимому мультимножеству типов контейнеров $\widehat{sc} \in \widehat{SC}_m$, сгенерируем множество всевозможных подмножеств, в которых тип контейнера $\hat{c} \in \widehat{sc}$ заменен на один из контейнеров $c \in C_{\hat{c}}$ типа $\hat{c}$ (при этом каждый такой контейнер входит в размещение не более одного раза).

Алгоритм отбора допустимых перестановок типов контейнеров для размещения на платформах модели m может быть формализован следующим образом:

1. Определяется минимальное (INF) и максимальное (SUP) количество контейнеров, которые могут быть установлены на платформы данной модели в рамках текущего расчета.
2. Все типы контейнеров делятся на группы в соответствии с партией отправки.
3. Для каждой группы генерируются всевозможные мультимножества длины INF, $INF+1$, ..., SUP с учетом числа контейнеров каждого типа.
4. Для каждого подмножества типов контейнеров из шага 3 генерируются все возможные перестановки.
5. Осуществляется выбор допустимых подмножеств типов контейнеров из шага 3. Подмножество считается допустимым, если хотя бы одна из его перестановок, созданных на шаге 4, удовлетворяет хотя бы одному варианту размещения контейнеров для данной модели.

Проверка того, удовлетворяет ли перестановка, полученная на шаге 4, варианту размещения контейнеров для данной модели, производится в следующем порядке:

a. Подходит ли количество типов контейнеров, определяемое перестановкой, для размещения на платформу по данному коду правила?
b. Нарушает ли суммарная масса типов контейнеров, определяемая перестановкой, грузоподъемность платформы?
c. Удовлетворяет ли перестановка требованиям к массам контейнеров?

Проверка прекращается, если хотя бы один из трех указанных критериев не удовлетворен. При этом, если не удовлетворены первый или второй критерии, то все остальные перестановки из порождающего подмножества типов контейнеров также не рассматриваются.

Модель смешанного целочисленного программирования

Рассмотрим следующую задачу смешанного программирования, построенную на базе задачи о покрытии множества (Caprara, Toth, Fischetti, 2000). В табл. 1 представлено описание множеств, а также параметров и неизвестных математической постановки задачи.

Таблица 1

Описание множеств, параметров и неизвестных математической постановки задачи

Параметры:	
C	множество контейнеров для размещения и отправки на платформах
B	число партий контейнеров в C
$C_b^{(2)}, \forall b \in \{1,\ldots,B\}$	множество контейнеров с партией b в C
$\{b : block_b = 1\}_{\forall b \in \{1,\ldots,B\}}$	множество партий контейнеров, таких что партия должна быть размещена на платформах целиком или не подлежит отправке вовсе
O	число приоритетов для всех контейнеров в C
$P^{(0)}$	множество обязательных к отправке платформ
$P^{(1)}$	множество необязательных к отправке платформ
T	число приоритетов для платформ в $P^{(1)}$
$\hat{C}$	множество уникальных типов контейнеров в C
$C_{\hat{c}}, \forall \hat{c} \in \hat{C}$	множество контейнеров с характеристиками, совпадающими с $\hat{c}$
$\hat{P}^{(0)}$	множество типов платформ в $P^{(0)}$
$\hat{P}^{(1)}$	множество типов платформ в $P^{(1)}$
$\widehat{SC}$	множество мультимножеств типов контейнеров
$\hat{M}$	множество моделей платформ в $\hat{P}^{(0)} \cup \hat{P}^{(1)}$
$\widehat{SC}_m, \forall m \in \hat{M}$	множество допустимых размещений типов контейнеров на платформах модели m
$\widehat{SC}_{\hat{c}}, \forall \hat{c} \in \hat{C}$	множество размещений типов контейнеров, таких что в каждом из этих мультимножеств содержится хотя бы один тип контейнера $\hat{c}$
$n_{\widehat{sc},o}, \forall \widehat{sc} \in \widehat{SC}, \forall o \in O$	число типов контейнеров o-го приоритета в мультимножестве $\widehat{sc}$
$n_{\widehat{sc},\hat{c}}, \forall \widehat{sc} \in \widehat{SC}, \forall c \in C$	число контейнеров типа $\hat{c}$ в мультимножестве $\widehat{sc}$
$dupl_{\hat{c}}, \forall \hat{c} \in \hat{C}$	количество контейнеров в C, соответствующих типу контейнеров $\widehat{sc}$
$dupl_{\hat{p}}, \forall \hat{p} \in \hat{P}^{(0)} \cup \hat{P}^{(1)}$	количество платформ в P, соответствующих типу платформ $\hat{p}$
Неизвестные:	
$x_{\hat{p},\widehat{sc}}, \forall p \in \hat{P}^{(0)} \cup \hat{P}^{(1)}, \forall \widehat{sc} \in \widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}$	количество платформ типа $\hat{p}$, которые загружены мультимножествами контейнеров, соответствующего типа, $\widehat{sc}$
$y_b^{(2)}, \forall b \in \{1,\ldots,B\}$: $block_b = 1$	индикатор того, что партия контейнеров b целиком размещена на платформах
$u_{\hat{p}}, \forall \hat{p} \in \hat{P}^{(0)}$	число неиспользованных платформ типа $\hat{p}$

Для каждой платформы $p \in \widehat{P}^{(0)} \cup \widehat{P}^{(1)}$, и каждого мультимножества $\widehat{sc} \in \widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}$ введем неизвестную величину $x_{\hat{p},\widehat{sc}}$, обозначающую количество платформ типа $\hat{p}$, которые загружены мультимножествами контейнеров, соответствующего типа, $\widehat{sc}$.

Кроме неизвестных типа x, введем фиктивные неизвестные:

$$y_b^{(2)} = \begin{cases} 1, \text{ если партия } C_b^{(2)} \text{ целиком размещена на платформах} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

где $b \in \{1, ..., B\}$: $block_b = 1$, и вещественные неизвестные $u_{\hat{p}} \forall\, \hat{p} \in \hat{P}^{(0)}$ — число неиспользованных платформ типа $\hat{p}$.

Введенные неизвестные дают возможность сформировать следующий набор, состоящий из $O + T$ критериев оптимизации, которые выстроены в порядке убывания важности (иерархию критериев):

$$L_1 = \sum_{\hat{p} \in \hat{P}^{(0)} \cup \hat{P}^{(1)}} \sum_{\widehat{sc} \in \widehat{SC}_{m_p}} n_{\widehat{sc},1}\, x_{\hat{p},\widehat{sc}} - |C| \sum_{\hat{p} \in \hat{P}^{(0)}} u_{\hat{p}} \to \max, \tag{1}$$

$$L_o = \sum_{\hat{p} \in \hat{P}^{(0)} \cup \hat{P}^{(1)}} \sum_{\widehat{sc} \in \widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} n_{\widehat{sc},o}\, x_{\hat{p},\widehat{sc}} \to \max, \forall\, o \in \{2, \ldots, O\}, \tag{2}$$

$$K_\tau = \sum_{\substack{\hat{p} \in \hat{P}^{(1)}: \\ t_{\hat{p}} = T - \tau + 1}} \sum_{\widehat{sc} \in \widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} x_{\hat{p},\widehat{sc}} \to \min, \forall\, \tau \in \{1, \ldots, T\}, \tag{3}$$

где

(1) — критерий оптимизации верхнего уровня, предполагающий максимизацию числа контейнеров первого приоритета, размещенных на платформах при использовании максимального числа обязательных к отправке платформ из множества $P^{(0)}$ (через $n_{\widehat{sc},1}$ обозначено число типов контейнеров первого приоритета в мультимножестве $\widehat{sc}$);

(2) — набор критериев оптимизации, предполагающих максимизацию числа контейнеров, размещенных на платформах и имеющих приоритет, равный o (через $n_{\widehat{sc},o}$ обозначено число типов контейнеров o-го приоритета в мультимножестве $\widehat{sc}$). Каждый критерий оптимизации из этого набора входит в общую иерархию критериев по возрастанию значения o;

(3) — набор критериев оптимизации, предполагающих минимизацию числа использованных платформ, не обязательных к отправке. Каждый критерий оптимизации из этого набора входит в общую иерархию критериев по убыванию значения τ.

В результате, выстроенная иерархия критериев оптимизации обеспечивает, что каждое решение из множества оптимальных решений многокритериальной задачи содержит максимально возможное количество обязательных к использованию платформ из $P^{(0)}$. Если в оптимальном решении использованы не все платформы из множества $P^{(0)}$, то список неиспользованных платформ позволит провести анализ и выявить причины, по которым все обязательные к отправке платформы не могут быть задействованы для размещения на них контейнеров.

Введем в математическую постановку следующие условия-равенства и условия-неравенства, описывающие ограничения задачи.

$$\sum_{\hat{p}\in\hat{P}^{(0)}\cup P^{(1)}}\ \sum_{\widehat{sc}\in\widehat{SC}_{\hat{c}}\cap\widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} n_{\widehat{sc},\hat{c}}\, x_{\hat{p},\widehat{sc}} \le dupl_{\hat{c}}, \quad \forall\ \hat{c}\in\hat{C}, \tag{4}$$

$$\sum_{\widehat{sc}\in\widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} x_{\hat{p},\widehat{sc}} + u_{\hat{p}} = dupl_{\hat{p}}, \quad \forall \hat{p}\in\ \hat{P}^{(0)}, \tag{5}$$

$$\sum_{\widehat{sc}\in\widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} x_{\hat{p},\widehat{sc}} \le dupl_{\hat{p}}, \quad \forall\ \hat{p}\in\hat{P}^{(1)}. \tag{6}$$

Условия (4)–(6) гарантируют, что каждый контейнер не более одного раза размещается на платформах, и не более одного подмножества контейнеров размещается на каждой платформе. Так как внутри одного мультимножества $\widehat{sc}\in\widehat{SC}$ типы контейнеров могут повторяться, то в ограничение (4) вводится число $n_{\widehat{sc},\hat{c}}$, обозначающее количество контейнеров типа $\hat{c}$ в мультимножестве $\widehat{sc}$.

Ограничения (7) обеспечивают выполнение требования о том, что каждая партия контейнеров b, для которой выполняется условие $block_b = 1$, либо должна быть целиком размещена на платформах, либо ни одному из контейнеров этой партии не будет назначена позиция на платформах:

$$\sum_{\hat{p}\in\hat{P}^{(0)}\cup\hat{P}^{(1)}}\ \sum_{\substack{\hat{c}\in\hat{C}:\\ \exists c\in C_b^{(2)}\cap C_{\hat{c}}}}\ \sum_{\widehat{sc}\in\widehat{SC}_{\hat{c}}\cap\widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}} n_{\widehat{sc},\hat{c}}\, x_{\hat{p},\widehat{sc}} = \left|C_b^{(2)}\right| y_b^{(2)}, \tag{7}$$

$$\forall\ b\in\{1,..B\} : block_b = 1.$$

Наконец, ограничения (8)–(10) описывают множество неизвестных в задаче смешанного программирования и их допустимых значений.

$$x_{\hat{p},\widehat{sc}} \in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}, \quad \forall\ \hat{p}\in\hat{P}^{(0)}\cup\hat{P}^{(1)}, \forall\ \widehat{sc}\in\widehat{SC}_{m_{\hat{p}}}, \tag{8}$$

$$y_b^{(2)} \in \{0,1\}, \quad \forall\ b\in\{1,\ldots,B\} : block_b = 1, \tag{9}$$

$$u_{\hat{p}} \ge 0, \quad \forall\ \hat{p}\in\hat{P}^{(0)}. \tag{10}$$

Числовые результаты

Для получения числовых результатов выполнена программная реализация алгоритма, основанного на точных методах решения задач многокритериальной целочисленной оптимизации (1)–(10). При этом как для векторного представления целевых функций и ограничений задачи, так и для вызова программ-оптимизаторов использован язык программирования Python 3.8 (Van Rossum, Drake, 2013).

Расчеты проводились с использованием следующих оптимизаторов:

- коммерческая лицензия:
  - Cardinal optimizer v6.5.11 (Документация COPT);
- свободное использование
  - COIN-OR CBC MILP Solver v2.10.3 (Документация CBC);
  - GLPK v0.5.0 (Документация GLPK);
  - ortools v9.6.2534 (Документация ortools);
  - SCIP v0.1.12 (Документация SCIP).

Расчеты производились на виртуальной машине Windows 10 со следующими характеристиками:

- процессор: Intel Xeon Silver 4110 CPU @ 2.10 GHz 2.10 GHz;
- оперативная память: 16 Гб;
- SSD: 100 Гб.

Каждый оптимизатор, если решение существует, находит оптимальное значение целевой функции с более высоким приоритетом, а затем, без ухудшения этого значения, оптимизирует целевую функцию с более низким приоритетом.

При проведении расчетов в настройках оптимизаторов был установлен параметр, ограничивающий по времени работу программы и равный 700 сек. При нарушении такой границы оптимизатор должен вернуть текущее лучшее (квазиоптимальное) решение.

В табл. 2 представлены результаты расчетов по типам найденных решений. В расчете использовались 125 наборов синтетических исходных данных, в которых число контейнеров варьируется от 60 до 140, а число платформ от 20 до 165. Для 104 наборов исходных данных все используемые оптимизаторы нашли оптимальное решение. В столбце «Суммарные временные затраты» представлены совокупные временные затраты по этим 104 наборам исходных данных.

Таблица 2

Характеристики решений по точной модели

Наименование оптимизатора	Количество расчетов с найденным оптимальным решением	Количество расчетов с найденным квазиоптимальным решением	Количество расчетов, в которых решение не найдено	Суммарные временные затраты, сек
CBC	120	5	0	4007
COPT	125	0	0	2512
GLPK	109	1	15	6984
SCIP	106	9	10	6135

Коммерческий оптимизатор COPT существенно превосходит все остальные по быстродействию, при этом для всех наборов исходных данных COPT нашел оптимальное решение, закончив расчет до достижения верхней границы по времени счета в 700 секунд.

В табл. 3 представлены примеры расчетов, проведенных с использованием оптимизатора COPT. Выражения $|C|$ и $|P|$ обозначают количество контейнеров и количество платформ, соответственно. В столбце «Генерация допустимых размещений» представлены временны́е затраты на работу алгоритма генерации допустимых размещений подмножеств типов контейнеров для каждой модели платформы из исходных данных.

Таблица 3

Примеры проведенных расчетов

Размер исходных данных		Отправлено		Время расчета (сек)	
$\|C\|$	$\|P\|$	$\|C\|$	$\|P\|$	Генерация допустимых размещений	COPT
59	33	59	23	8	5
66	18	42	18	9	10
68	31	68	31	12	13
75	35	75	34	17	15
103	38	103	35	92	100
116	53	114	44	154	126
138	64	138	58	372	444

Заключение

В статье предложена новая математическая модель для решения задачи о назначении контейнеров на железнодорожные платформы, основанная на точных оптимизационных подходах. Представлена математическая постановка задачи в форме задачи смешанного программирования, выполнена ее программная реализация, с помощью которой проведены массовые числовые расчеты с использованием различных оптимизаторов, а также проведен их сравнительный анализ. Разработанный подход позволяет получить оптимальное решение задачи в рамках ограниченного временного ресурса.

Источники

Бродецкий Г. Л. Методы оптимизации многокритериальных решений в логистике. М., 2009.

Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / пер. с фр. и предисловие А. И. Штерна. М., 1990.

Приказ Министерства транспорта РФ от 18 декабря 2019 г. № 405 «Об утверждении Правил перевозок железнодорожным транспортом грузов в контейнерах и порожних контейнеров».

Документация COPT // Cardinal optimizer v6.5.1: сайт. Режим доступа: https://guide.coap.online/copt/en-doc/ (дата обращения: 25.07.2024).

Документация CBC // COIN-OR CBC MILP Solver v2.10.3: сайт. Режим доступа: https://github.com/coin-or/Cbc (дата обращения: 25.07.2024).

Документация GLPK // GLPK v0.5.0: сайт. Режим доступа: https://www.gnu.org/software/glpk/ (дата обращения: 25.07.2024).

Документация ortools // ortools v9.6.2534: сайт. Режим доступа: https://developers.google.com/optimization (дата обращения: 25.07.2024).

Документация SCIP // SCIP v0.1.12: сайт. Режим доступа: https://www.scipopt.org/ (дата обращения: 25.07.2024).

Anghinolfi D., Caballini C., Sacone S. Optimizing Train Loading Operations in Innovative and Automated Container Terminals // IFAC Proceedings. 2014. Vol. 47. N 3. P. 9581–9586.

Bruck B., Cordeau J., Frejinger E. Integrated Inbound Train Split and Load Planning in an Intermodal Railway Terminal // Transportation Research Part B: Methodological. 2021. Vol. 145. P. 270–289.

Caprara A., Toth P., Fischetti M. Algorithms for the Set Covering Problem // Annals of Operations Research. 2000. Vol. 98. P. 353–371.

Heggen H., Braekers K., Caris A. Optimizing Train Load Planning: Review and Decision Support for Train Planners // In Computational Logistics: 7th International Conference, ICCL 2016, Lisbon, Portugal, September 7–9, Proceedings 7. 2016. P. 193–208.

Heggen H., Braekers K., Caris A. A Multi-objective Approach for Intermodal Train Load Planning // OR spectrum. 2018. Vol. 40. 2. P. 341–366.

Kendall J. W. Hard and Soft Constraints in Linear Programming // Omega. 1975. Vol. 3. N 6. P. 709–715.

Knuth D. E. The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms // Addison-Wesley Professional. 2014. Vol. 2.

Maniezzo V., Stützle T., Voß S. Matheuristics. Springer International Publishing, 2021.

Mantovani S., Morganti G., Umang N., Crainic T. G., Frejinger E., Larsen E. The Load Planning Problem for Double-stack Intermodal Trains // European Journal of Operational Research. 2018. Vol. 267. N 1. P. 107–19.

Rathi P., Upadhyay A. Container Retrieval and Wagon Assignment Planning at Container Rail Terminals // Computers & Industrial Engineering. 2022. Vol. 172.

Ruf M., Cordeau J. F., Frejinger E. The Load Planning and Sequencing Problem for Double-stack Trains // Journal of Rail Transport Planning & Management. 2022. Vol. 23.

Van Rossum G., Drake F. L. Python 3 Reference Manual. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009.

References

Anghinolfi D., Caballini C., Sacone S. Optimizing train loading operations in innovative and automated container terminals. *IFAC Proceedings,* 2014, vol. 47, N 3, pp. 9581–9586.

Brodeczkij G. L., Metody` optimizacii mnogokriterial`ny`x reshenij v logistike [Methods of optimization of multicriterial decisions in logistics]. Moskow, 2009. (In Russian)

Bruck B., Cordeau J., Frejinger E. Integrated inbound train split and load planning in an intermodal railway terminal. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2021, vol. 145, pp. 270–289.

Caprara A., Toth P., Fischetti M. Algorithms for the Set Covering Problem. *Annals of Operations Research*, 2000, vol. 98, pp. 353–371.

Cardinal optimizer v6.5.1. Available at: https://guide.coap.online/copt/en-doc/. (In Russian)

COIN-OR CBC MILP Solver v2.10.3. Available at: https://github.com/coin-or/Cbc. (In Russian)

GLPK v0.5.0. Available at: https://www.gnu.org/software/glpk/. (In Russian)

Heggen H., Braekers K., Caris A. Optimizing train load planning: review and decision support for train planners. *In Computational Logistics: 7th International Conference, ICCL 2016*, Lisbon, Portugal, September 7–9, Proceedings 7, 2016, pp. 193–208.

Heggen H., Braekers K., Caris A. A multi-objective approach for intermodal train load planning. *OR spectrum*, 2018, vol. 40, N 2, pp. 341–366.

Kendall J. W. Hard and soft constraints in linear programming. *Omega*, 1975. Vol. 3, N 6, pp. 709–715.

Knuth D. E. *The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms*, vol. 2. Addison-Wesley Professional, 2014.

Maniezzo V., Stützle T., Voß S. *Matheuristics*. Springer International Publishing, 2021.

Mantovani S., Morganti G., Umang N., Crainic T. G., Frejinger E., Larsen E. The load planning problem for double-stack intermodal trains. *European Journal of Operational Research*, 2018, vol. 267, N 1, pp. 107–19.

Minoux M. Programmation mathématique. *Théorie et algorithmes*. Lavoisier, 2008.

Ortools v9.6.2534: URL: https://developers.google.com/optimization

Prikaz Ministerstva transporta RF ot 18 dekabrya 2019 g. № 405 [Order of the Ministry of Transport of the Russian Federation dated December 18, 2019 № 405] «Ob utverzhdenii Pravil perevozok zheleznodorozhny`m transportom gruzov v kontejnerax i porozhnix kontejnerov» [On approval of the Rules for the transportation of goods in containers and empty containers by rail]. (In Russian)

Rathi P., Upadhyay A. Container retrieval and wagon assignment planning at container rail terminals. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, vol. 172.

Ruf M., Cordeau J. F., Frejinger E. The load planning and sequencing problem for double-stack trains. *Journal of Rail Transport Planning & Management*, 2022, vol. 23.

SCIP v0.1.12. URL: https://www.scipopt.org/

Van Rossum G., Drake F. L. *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2024 г.
Статья рекомендована в печать 30 июня 2024 г.