Е. М. Ильин
канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института проблем региональной экономики РАН
Н. Г. Косолапенко
научный сотрудник Института проблем региональной экономики РАН
М. А. Пахнин
канд. экон. наук, научный сотрудник Института проблем региональной экономики РАН; доцент факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге

МОДЕЛЬ ВНЕШНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. Введение

Для весьма широкого класса социальных систем (возрастных групп, социальных сетей, интернет-сообществ, массовых процессов, общественных движений), верна следующая особенность: процесс формирования общественного сознания включает как совокупность элементов, вырабатывающихся в процессе самоорганизации, так и элементы, образующиеся под воздействием влияний, внешних по отношению к рассматриваемой общности (например, рекламных кампаний и других видов пропаганды). В связи с этим актуальны постановка и решение задачи об оптимальном внешнем регулировании подобных самоорганизующихся социальных систем.

Опишем кратко общую схему моделирования данной задачи. Рассмотрим некоторую социальную группу (сеть), подверженную информационным воздействиям, которые могут изменять «статус» членов сети (например, может меняться их уровень и направление социальной активности или меняются сложившиеся социальные представления). Степень результативности (распространенности) информационных воздействий естественно характеризовать численностью «адептов», принявших новый «статус» (новые ценности, идеи, нормы и так далее). Интенсивность изменения численности этой подгруппы может меняться по двум причинам. Во-первых, она зависит от «информационного» фактора (сигнала обратной связи), возникающего благодаря самоорганизации сети в результате контактов членов группы между собой. Особенно интересно рассматривать ситуацию, когда информационный фактор является не постоянным во времени параметром, а эндогенным. Естественно предполагать, что он формируется в результате личных контактов, так что интенсивность его изменения есть линейная комбинация численности двух подгрупп.

Во-вторых, численность подгруппы «адептов» может изменяться в результате внешних информационных воздействий. Эти внешние воздействия управляются неким центральным планировщиком, который несет издержки как от пребывания людей в группе «адептов», так и от воздействий, направленных на регулирование численности их группы. В этих условиях задача управления социальной сетью с точки зрения планировщика состоит в выборе оптимального воздействия, минимизирующего суммарные издержки.

Данная работа устроена следующим образом. В разделе 2 описывается математическая модель внешнего регулирования самоорганизующихся двухкомпонентных социальных систем. Такая модель является стандартным объектом теории оптимального управления, методы и приложения которой довольно хорошо разработаны (см., например, книги Кротов, Гурман, 1973; Васильев, 1974; Федоренко, 1978; Алексеев и др., 1979; Васильев, 1988; Егоров, 2004; Лагоша, Апалькова, 2008). В разделе 3 подробно рассматривается задача прямого управления, в которой численности групп непосредственно определяют величину сигнала обратной связи. В разделе 4 кратко описывается принцип реализации механизма непрямого управления для рассматриваемой задачи. Раздел 5 представляет собой заключение.

2. Модель

2.1. Математическая формулировка

Предположим, что на временном интервале $[0, T]$ нам известен закон изменения численности населения, состоящего из двух групп. Обозначим численность населения через $h(t)$, а численность групп, соответственно, через $x(t)$ и $y(t)$. Очевидно, что $x(t) + y(t) = h(t)$, $0 \leqslant x(t) \leqslant h(t)$, $0 \leqslant y(t) \leqslant h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Члены группы контактируют между собой и с людьми из другой группы, в результате чего они могут перейти в другую группу или остаться в своей. Интенсивность переходов зависит от численности групп, а также от сигнала обратной связи (информационного фактора), описываемого функцией $v(t)$, $-\infty < v(t) < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$, который в свою очередь определяется численностью групп и, кроме того, зависит от характеристик внешней среды. Наряду с переходами, вызванными стремлением населения к самоорганизации, процесс перехода протекает под управляющим воздействием центрального планировщика (Центра). Пусть $u(t)$ — управление, то есть функция, реализующая влияние Центра на интенсивность переходов. Таким образом, мы имеем управляемую динамическую систему, состояние которой в любой момент времени t задается парой функций $\{y(t), u(t)\}$, которую мы будем называть процессом управления[1].

В сделанных предположениях динамика численности групп описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha(t)v(t)x(t)y(t) - q(t)x(t) - u(t); \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \beta(t)x(t) + \gamma(t)y(t) - m(t)v(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) = h(t) - y(t)$. Все коэффициенты уравнений (1) и $h(t)$ — непрерывные функции времени t на $[0, T]$, при этом $\alpha(t) > 0$, $q(t) > 0$, $m(t) > 0$, а $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ могут быть любого знака. Управление $u(t)$ будем считать кусочно-непрерывной функцией, а функции $y(t)$ и $v(t)$ — непрерывными и кусочно-дифференцируемыми.

В зависимости от вида рассматриваемой задачи оптимизации, будем полагать, что область допустимых управлений $u(t)$ либо составляет конечный интервал

$$u_0(t, y(t)) \leqslant u(t) \leqslant u_1(t, y(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

либо на управление не накладывается никаких ограничений, то есть $-\infty < u(t) < \infty$. Кроме того, сосредоточимся лишь на практически важном случае самоорганизации, при котором в любой момент времени полны обе группы населения, то есть будем полагать, что $0 < y(t) < h(t)$.

Определение 1. Пусть $V(t)$ — множество пар $\{y(t), u(t)\}$, для которых при каждом фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant T$, управления $u(t)$ удовлетворяют наложенным

[1] Очевидно, что в качестве процесса управления можно было бы рассматривать и пару $\{x(t), u(t)\}$.

ограничениям, и $0 < y(t) < h(t)$. Классом допустимых процессов M называется множество принадлежащих $V(t)$ пар, удовлетворяющих уравнениям (1) и граничным условиям

$$y(0) = y_0, y(T) = y_1. \tag{3}$$

Пусть для всех моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T$ задано управление $u(t)$. Если вдобавок заданы начальные значения функций $y(0)$ и $v(0)$, то существует единственная удовлетворяющая им траектория $y(t)$. Следовательно, пара $\{y(t), u(t)\}$ полностью характеризует исследуемый процесс формирования групп.

Задача Центра состоит в преобразовании за интервал времени $[0, T]$ группы фиксированной исходной численности y_0 в группу заданной численности y_1. Центр должен управлять процессом формирования групп оптимально, то есть реализовать поставленную цель с наименьшими затратами. Будем предполагать, что затраты (*dis-utility*) Центра на преобразование численностей группы имеют две составляющие. Во-первых, затраты на пребывание людей в группе, которые без ограничения общности можно принять за 1 (в расчете на одного человека). Во-вторых, затраты на мероприятия по регулированию численности группы, которые пропорциональны величине управления: $s(t)u(t)$, где $s(t) > 0$ — непрерывная строго положительная функция. Таким образом, суммарные затраты на преобразование численности группы равны

$$J(y,u) = \int_0^T (y(t) + s(t)u(t))\,dt\,. \tag{4}$$

Определение 2. Процесс $\{y^*(t), u^*(t)\}$, доставляющий минимум функционалу (4) в классе M, называется оптимальным[1]. При этом $y^*(t)$ называется оптимальной траекторией, а $u^*(t)$ — оптимальным управлением.

2.2. Области применимости модели

Приведем некоторые примеры процессов из реальной жизни, формализация которых приводит к задачам оптимального управления рассматриваемого нами типа.

Системы нелинейных дифференциальных уравнений, аналогичные (1), используются (при $u(t) = 0$) для моделирования эпидемий с учетом вирулентности вирусов (Колесин, 2013). В работе (Андреева, Цирулева, 1997) при помощи принципа максимума проводится анализ управляемой модели распространения заболевания. При этом изменение вирулентности возбудителя в расчет не принимается. Рассматриваемая в настоящей работе модель позволяет учесть это явление в ходе преодоления эпидемии. Перед Центром (системой здравоохранения) ставится задача ликвидировать эпидемию за определенное время и с наименьшими затратами. Иначе говоря, к моменту времени T необходимо обеспечить заданный уровень численности инфицированных. Опишем схематично модель эпидемии. Пусть $y(t)$ обозначает численность инфицированных людей, а $x(t)$ — численность подверженных заболеванию. Вирусное заболевание передается только при встрече здоровых людей и инфицированных, и вероятность такой встречи характеризуется функцией $\alpha(t)x(t)y(t)$. Кроме того, в процессе эпидемии болезнетворная способность вируса изменяется благодаря мутациям, и иммунная система человека оказывается недостаточно эффективной, чтобы подавить возбудителя заболевания. Функция $v(t)$ характеризует степень вирулентности вируса, которая зависит от степени восприимчивости здорового населения. В модели учитывается

[1] В дальнейшем будем предполагать, что класс M не пуст.

изменение вирулентности вируса во время протекания эпидемии, то есть влияние численности заболевших на интенсивность мутаций вируса — второе уравнение системы (1) отражает тот факт, что к концу эпидемии численность заболевших $y(t)$ снижается, а с ней уменьшается и вирулентность вируса. Таким образом, интенсивность инфицирования, зависящая как от вероятности встречи больных и здоровых людей, так и от уровня вирулентности возбудителя, описывается слагаемым $\alpha(t)x(t)y(t)v(t)$.

Системой здравоохранения проводится вакцинация людей, подверженных заболеванию. Влияние вакцинации на интенсивность заболевания описывается функцией $u(t)$. Общие затраты на преодоление эпидемии за период времени $[0, T]$, выражающиеся интегралом (4), состоят из затрат на уход за заболевшими (стоимость ухода равна единице) и затрат на вакцинацию.

Заметим, что подобный механизм передачи информации, но уже не генетической, а социально значимой, обуславливает процесс формирования социальных сетей. Развитие этой аналогии дает возможность перенести принципы описания эпидемических заболеваний в область социально-экономических явлений. В связи с указанной аналогией, системы дифференциальных уравнений вида (1) применяются для моделирования разнообразных механизмов социальной самоорганизации. Например, в (Колесин, 2013) рассмотрены процессы образования дискуссионной группы, формирования коллектива, социальных представлений и общественной инициативы, внутренней миграции, а также ряд других социальных явлений.

Опишем также модель формирования регионального рынка труда, укладывающуюся в предложенную нами схему. Перед Центром (региональной службой занятости) стоит задача достижения в городе (центре региона) к заданному сроку определенной численности экономически активного населения (ЭАН)[1] путем сдерживания внутренней миграции из области в город и развития областного рынка труда. Миграция населения между городом и областью происходит естественным путем за счет обмена информацией среди жителей региона о социально-экономической ситуации в городе и области. Динамика формирования численности ЭАН города $y(t)$ за счет самоорганизации может быть описана системой дифференциальных уравнений вида (1) при $u(t) = 0$. При этом величина информационного фактора в процессе самоорганизации населения региона, которая описывается функцией $v(t)$, характеризует свойственные всем жителям региона представления, служащие организующим миграцию фактором. Общие групповые преставления складываются из двух компонент: первая формируется в основном в ЭАН города (представления о возможностях трудоустройства, условиях работы и проживания), а вторая вырабатывается в ЭАН области (и связана с оценкой разницы в оплате и условиях труда). В модели постулируется, что степень влияния компонент пропорциональна численности групп, и информационный фактор линейно зависит от компонент. Коэффициент $\alpha(t) = \alpha_1(t)\,\alpha_2(t)$ описывает как вероятность межличностного общения представителей групп (например, для индивидов группы $y(t)$ эта вероятность равна $\alpha_1(t)x(t)$), так и уровень доверия к информации ($\alpha_2(t)$).

Степень влияния проводимых Центром мероприятий на численность городского ЭАН задается функцией $u(t)$. Стоимость формирования регионального рынка труда складывается из затрат на работу с городским ЭАН, в первую очередь с безработными (считаем, что эти затраты в расчете на одного экономически активного

[1] ЭАН включает как занятых, так и безработных.

горожанина равны единице). Помимо этого, Центр финансирует мероприятия по повышению гибкости рынка труда всего региона (информирование работников и работодателей, взаимодействие с образовательными учреждениями, рекрутерами и т. д.), а также может непосредственно работать с сельским населением, что тоже приводит к изменению занятости в городе. Наряду с этим Центр может проводить мероприятия по повышению качества жизни в области, например, используя региональные особенности, стимулировать в области инвестиционную активность. Эта часть затрат Центра выражается слагаемым $s(t)u(t)$. Тогда интеграл (4) представляет общие затраты Центра на достижение к заданному сроку планируемой численности городского ЭАН.

Поскольку миграция в основном определяется экономическими факторами, то, по существу, таким же образом может быть построена и региональная модель регулирования общего потока миграции. Миграционный оборот определяется общими для населения обеих частей региона представлениями. Информационный фактор, как и выше, образуется из двух компонент, первая из которых формируется жителями депрессивных районов, а вторая вырабатывается земляческими общинами города, и именно их представлениями о социально-экономической ситуации в городе руководствуются иммигранты. Интеграл (4) и в этом случае выражает затраты на управление миграционным процессом.

Кроме того, рассматриваемая нами задача оптимального управления может применяться и для организации процесса распространения инноваций, реализуемого в рамках государственных программ и основанного на парных встречах заинтересованных сторон (в качестве примера можно привести модель самоорганизации торговых сетей), а также для регулирования процессов трудоустройства.

3. Задача прямого управления

3.1. Метод достаточных условий

Рассмотрим сначала задачу прямого управления, которая характеризуется тем, что численности групп влияют не на скорость изменения, а на величину сигнала обратной связи. Если $dv(t)/dt = 0$ на отрезке $[0, T]$, то из второго уравнения (1) следует, что значения сигнала обратной связи определяются уравнением

$$v(t) = \frac{1}{m(t)}\Big(\beta(t)x(t) + \gamma(t)y(t)\Big) = \delta(t)y(t) + \sigma(t), \tag{5}$$

где для всех моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\delta(t) = \frac{\gamma(t) - \beta(t)}{m(t)}, \quad \text{и} \quad \sigma(t) = \frac{\beta(t)\,h(t)}{m(t)}. \tag{6}$$

Используя соотношение $x(t) = h(t) - y(t)$ и (5)–(6), исключим из первого уравнения (1) переменные $x(t)$ и $v(t)$. Получим для функции $y(t)$ следующее уравнение дифференциальной связи:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{d(t)} &= -\alpha(t)\,\delta(t)\,y^3(t) + \alpha(t)\,(\delta(t)\,h(t) - \sigma(t))\,y^2(t) + \\ &+ (\alpha(t)\sigma(t)\,h(t) + q(t))\,y(t) - q(t)\,h(t) + u(t) \equiv P(t, y(t)) + u(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь задача управления численностью групп сводится к определению допустимого процесса $\{y^*(t), u^*(t)\}$, доставляющего минимум функционалу (4), в котором фазовая переменная $y(t)$ удовлетворяет динамическому ограничению (7).

Для решения задачи оптимального управления используем метод достаточных условий оптимальности, предложенный В. Ф. Кротовым (подробное изложение этого принципа оптимальности см. в книгах Кротов, Гурман, 1973; Васильев, 1974; Лагоша, Апалькова, 2008; Krotov, 1996). Поскольку метод решения опирается на достаточные условия, то в отличие от методов, построенных на использовании необходимых условий оптимальности, он гарантирует, что полученный результат действительно будет решением задачи оптимального управления.

Кратко опишем нужную нам схему метода достаточных условий. Упомянутый принцип оптимальности сводит задачу минимизации функционала $J(y, u)$ в классе допустимых процессов к задачам нелинейного программирования в конечномерном пространстве для специально построенной функции $R(t, y(t), u(t))$ (при фиксированных значениях t). Применительно к нашей модели, зададим функцию $R(t, y(t), u(t))$ при помощи следующей формулы:

$$R(t, y(t), u(t)) = \frac{\partial\phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial\phi(t, y(t))}{\partial y}(P(t, y(t)) + u(t)) - y(t) - s(t)\,u(t), \quad (8)$$

где $\phi(t, y(t))$ — произвольная функция, имеющая непрерывные частные производные. Функция $R(t, y(t), u(t))$ представляет собой, как нетрудно видеть, полную производную по времени функции $\phi(t, y(t))$, вычисленную на решениях уравнения процесса (5) за вычетом подынтегральной функции из (4).

Сформулируем достаточные условия существования минимизирующей последовательности. Пусть существует функция $\phi(t, y(t))$ (решающая функция), имеющая непрерывные частные производные, и пусть существует последовательность принадлежащих классу M пар $\{y_k, u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что выполняется условие:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T R(t, y_k(t), u_k(t))\,dt = \int_0^T \sup_{\{y(t),\, u(t) \in V(t)\}} R(t, y(t), u(t))\,dt. \quad (9)$$

Тогда последовательность $\{y_k, u_k\}$ является минимизирующей для функционала $J(y, u)$.

Для минимизирующих последовательностей частного вида таких, что $y_k = y^*$, $u_k = u^*$ при всех k, из приведенного результата вытекает следующее утверждение. Пусть существуют функция $\phi(t, y(t))$, имеющая непрерывные частные производные, и принадлежащая классу M пара $\{y^*, u^*\}$ такая, что для всех моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$R(t, y^*(t), u^*(t)) = \sup_{\{y(t), u(t) \in V(t)\}} R(t, y(t), u(t)).$$

Тогда процесс $\{y^*, u^*\}$ является оптимальным.

Рассматриваемая нами задача отличается линейной зависимостью от управления как правой части уравнения процесса (5), так и подынтегральной функции функционала (4). Далее будем следовать работам (Лагоша, Апалькова, 2008; Krotov, 1996), где показано, что для линейных по управлению задач приведенные достаточные условия позволяют эффективно строить оптимальные решения. Если подобрать функцию $\phi(t, y(t))$ так, чтобы функция $R(t, y(t), u(t))$ не зависела от управления $u(t)$, то автоматически будет выполнено условие ее максимума по $u(t)$. В результате дело сведется к одномерной задаче оптимизации функции $R(t, y(t))$ при всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Максимум можно искать, не учитывая ограничений на фазовую переменную $y(t)$. Найдя явное выражение для максимизирующей функции $y^*(t)$, останется определить ограничения на параметры задачи, обеспечивающие условия полноты обеих групп: $0 < y(t) < h(t)$.

Положим $\phi(t, y(t)) = s(t)y(t)$. Тогда функция (8) будет зависеть только от фазовой переменной $y(t)$ и времени: $R(t, y(t), u(t)) = R(t, y(t))$. Действительно, из (8) с учетом (5) получаем

$$R(t,y(t)) = -\alpha(t)\,\delta(t)\,s(t)\,y^3(t) + \alpha(t)\,s(t)\Big(\delta(t)\,h(t) - \sigma(t)\Big)\,y^2(t)\ + \\ + \left[s(t)\Big(\alpha(t)\sigma(t)\,h(t) + q(t)\Big) + \frac{ds(t)}{dt} - 1\right]y(t) - s(t)\,q(t)\,h(t)\,. \tag{10}$$

Уравнение $dR/dy = 0$ приводит к квадратному уравнению $a(t)y^2(t) + 2b(t)y(t) + c(t) = 0$, где коэффициенты имеют вид

$$a(t) = 3\alpha(t)\,\delta(t),\ \ b(t) = -\alpha(t)\,\Big(\delta(t)\,h(t) - \sigma(t)\Big), \\ c(t) = -\alpha(t)\,\sigma(t)\,h(t) - q(t) - \frac{1}{s(t)}\left(1 - \frac{ds(t)}{dt}\right). \tag{11}$$

Таким образом, максимум $R(t, y(t))$ будет достигаться на функции

$$y^*(t) = \frac{-b(t) + \sqrt{\Delta(t)}}{a(t)}\,, \tag{12}$$

где $\Delta(t) = b^2(t) - a(t)c(t)$ — дискриминант квадратного уравнения, заданного коэффициентами (11). В терминах параметров модели, $\Delta(t)$ имеет вид

$$\Delta(t) = \frac{\alpha(t)}{m(t)}\left[\frac{\alpha(t)}{m(t)}h^2(t)\Big(\beta^2(t) - \beta(t)\gamma(t) + \gamma^2(t)\Big) + \right. \\ \left. + 3\Big(\gamma(t) - \beta(t)\Big)\left(q(t) - \frac{1}{s(t)}\left(1 - \frac{ds(t)}{dt}\right)\right)\right]. \tag{13}$$

Поскольку $y^*(t)$ должна быть вещественной функцией, необходимо, чтобы дискриминант $\Delta(t)$ был неотрицателен. Предположим, что параметры задачи обеспечивают выполнение неравенства $\Delta(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Отложим пока анализ ограничений на параметры, обеспечивающие полноту обеих групп населения, и будем считать, что они выполнены, то есть пусть $0 < y(t) < h(t)$ для всех t из интервала $[0, T]$.

Определение 2. Функция $y^*(t)$, заданная формулой (12), и такая, что $0 < y^*(t) < h(t)$, называется магистралью для оптимизационной задачи в нашей динамической модели.

Соответствующее магистрали управление $u^*(t)$ определяется уравнением (7):

$$u^*(t) = \frac{dy^*(t)}{dt} - P\Big(t, y^*(t)\Big). \tag{14}$$

Формулы (11)–(13) позволяют выразить управление $u^*(t)$ через параметры задачи.

Если магистраль удовлетворяет граничным условиям (3), то она является оптимальной траекторией. Хотя при построении магистрали граничные условия никак не учитывались и в общем случае магистраль, конечно, не удовлетворяет условиям (3), явная формула (12) для $y(t)$ позволяет подобрать для моментов времени $t = 0$, $t = T$ величины граничных условий (3) и значения коэффициентов задачи так, чтобы обеспечить оптимальность магистрали. Например, в случае $a(0)y_0 + b(0) > 0$ для коэффициентов должно выполняться равенство $a(0)(y_0)^2 + 2b(0)y_0 = -c(0)$, а при $a(T)y_1 + b(T) > 0$ — аналогичное соотношение $a(T)(y_1)^2 + 2b(T)y_1 = -c(T)$. В частности, если в задаче отсутствуют ограничения на управление и магистраль допустима, то процесс $\{y^*(t), u^*(t)\}$ является оптимальным.

В общем случае, когда не выполнено хотя бы одно граничное условие, магистраль можно использовать для построения оптимальных траекторий, которые ищутся в классе минимизирующих последовательностей. Возьмем произвольные последовательности моментов времени, принадлежащие отрезку $[0, T]$ и такие, что $t_k \to 0$ и $T_k \to T$, $k = 1, 2, \ldots$. Соединим отрезками прямой линии начальную точку y_0 и точки $y^*(t_k)$. То же проделаем с конечной точкой y_1 и точками $y^*(T_k)$. Иначе говоря, построим кусочно-гладкую непрерывную функцию $y^*{}_k(t)$ такую, что

$$y_k^*(t) = \begin{cases} y_0 + \dfrac{y^*(t_k) - y_0}{t_k} t, 0 \le t < t_k, \\ y^*(t),\ t_k \le t < T_k, \\ y_1 + \dfrac{y^*(T_k) - y_1}{T - T_k}(T - t), T_k \le t \le T. \end{cases} \tag{15}$$

Очевидно, что функции $y^*{}_k(t)$ будут допустимыми траекториями уравнения (7), если реализующие их управления $u^*{}_k(t)$ вычислены по формуле (14). Таким образом можно получить последовательность допустимых процессов $\{y^*{}_k(t), u^*{}_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Условие (9) вытекает из построения функций $y^*{}_k(t)$: так как функция $R(t, y^*{}_k(t))$ ограничена, то при $k \to \infty$ интегралы от нее от 0 до t_k и от T_k до T стремятся к нулю и, поскольку $y^*(t)$ — магистраль, условие (9) выполняется. Другими словами, построенная последовательность процессов $\{y^*{}_k(t), u^*{}_k(t)\}$ является минимизирующей. Отметим, что отсутствие ограничений на управление существенно для построения минимизирующей последовательности, поскольку значения управления $u^*{}_k(t)$ могут неограниченно возрастать при $k \to \infty$.

Пусть теперь область допустимых управлений $u(t)$ должна удовлетворять ограничениям (2). Формулы (12) и (14) позволяют выяснить, удовлетворяет ли реализующее магистраль управление ограничениям (2), и в том случае, когда это условие не выполняется, есть ли возможность выбрать обеспечивающие его соотношения коэффициентов задачи. Если коэффициенты изменять нельзя, а условие (2) не выполнено, то, используя магистраль, можно сконструировать оптимальный процесс следующим образом.

Введем в рассмотрение четыре решения задачи Коши для уравнения (7). Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — траектории уравнения (7) при $u(t) = u_0(t, y(t))$ и соответственно начальных условиях $z(0) = y_0$, $z(T) = y_1$, а $z_3(t)$ и $z_4(t)$ — траектории уравнения (7) при $u(t) = u_1(t, y(t))$ и тех же начальных условиях. В (Лагоша, Апалькова, 2008; Krotov, 1996) показано, что при ограничении на управления (2), любая траектория, начинающаяся в точке y_0, не может пересечь траектории $z_1(t)$ и $z_3(t)$, а траектория, стремящаяся при $t \to T$ к y_1, не может пересечь траектории $z_2(t)$ и $z_4(t)$. Поскольку рассматриваемые нами траектории ограничены условием $0 < y(t) < h(t)$, то любая такая пригодная для наших целей траектория $y(t)$, начинающаяся в точке y_0 и оканчивающаяся в точке y_1, не может выйти за пределы области $B(t)$, ограниченной кривыми $h(t)$, $z_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ и осью $y = 0$. Более точно, для всех моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T$, справедливо неравенство

$$\max\left\{ z_1(t), z_4(t), 0\right\} \le y(t) \le \min\left\{ z_2(t), z_3(t), h(t)\right\}.$$

Если у магистрали $y^*(t)$ есть пересечения с траекториями $z_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$, то можно образовать кусочно-гладкую траекторию, удовлетворяющую (7) и состоящую из участков магистрали и траекторий $z_i(t)$. Два из них (участки траекторий $z_i(t)$) примыкают к граничным условиям (7), а средний участок состоит из отрезков магистрали $y^*(t)$ и кривых $z_i(t)$. Моменты времени переключения определяются равенствами $y^*(t) = z_i(t)$. Пусть, например, уравнения $y^*(t) = z_1(t)$ и $y^*(t) = z_4(t)$ имеют единственные решения $t_1 < t_2$. Тогда траектория процесса состоит из трех участков, два из которых отвечают предельным значениям управлений $u_0(t, y(t))$ и $u_1(t, y(t))$, а средний участок представляет отрезок магистрали и соответствует промежуточным значениям управления. Реализующее построенную траекторию управление вычисляется по формуле (14), причем ограничения (2) надо проверять лишь на участке, состоящем из магистрали. Если ограничения на управления выполнены, то построенный таким образом процесс $\{y^\wedge(t), u^\wedge(t)\}$ будет оптимальным. В том случае, когда ограничения (2) не выполнены, решить оптимизационную задачу описанным способом нельзя.

3.2. Основные результаты

Сформулируем, наконец, условия, при которых параметры модели обеспечивают полноту обеих групп населения, то есть для функции (12) выполняется неравенство $0 < y^*(t) < h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Сначала разберем случай, когда дискриминант квадратного уравнения, заданного коэффициентами (11), строго положителен: $\Delta(t) > 0$, где $\Delta(t)$ задан формулой (13).

Предложение 1. Магистраль оптимизационной задачи динамической модели существует и задается формулой (12), где $\Delta(t) > 0$, если для всех моментов времени t из интервала $[0, T]$ выполняется одна из следующих систем неравенств.

1. Если $a > 0$, $b > 0$, то требуется, чтобы $c < 0$ и $-c < h(ah+2b)$. Неравенство $\Delta(t) > 0$ выполняется автоматически. Ограничения в терминах коэффициентов задачи: $\beta > 0$, $\beta < \gamma < 2\beta$, $-\alpha\gamma h^2/m < (1 - ds/dt)/s - q < \alpha\beta h^2/m$. При $\beta < 0$ решений нет.

2. Если $a > 0$, $b < 0$, то требуется, чтобы $ah + b > 0$ и $-c < h(ah+2b)$ и $\Delta(t) > 0$. В терминах коэффициентов: {при $\beta > 0$, $\gamma > 2\beta$, при $\beta < 0$, $\gamma > \beta/2$} и $-\alpha\gamma h^2/m < (1 - ds/dt)/s - q$ и $\Delta(t) > 0$, для чего достаточно, чтобы $(1 - ds/dt)/s - q \leqslant 0$.

3. Если $a < 0$, $b > 0$, то требуется, чтобы $c < 0$ и $\Delta(t) > 0$ и либо $ah + b \leqslant 0$, либо одновременно $ah + b > 0$ и $-c < h(ah+2b)$. В терминах коэффициентов: {при $\beta > 0$, либо $\gamma \leqslant \beta/2$ и $(1 - ds/dt)/s - q < \alpha\beta h^2/m$, либо $\beta/2 < \gamma < \beta$ и $-\alpha\gamma h^2/m < (1 - ds/dt)/s - q < \alpha\beta h^2/m$; при $\beta < 0$, $\gamma > 2\beta$ и $(1 - ds/dt)/s - q < \alpha\beta h^2/m$} и $\Delta(t) > 0$. При $\beta > 0$ для неравенства $\Delta(t) > 0$ достаточно, чтобы $0 \leqslant (1 - ds/dt)/s - q$.

4. Если $a < 0$, $b < 0$, то положительных решений $y(t)$ нет.

Теперь рассмотрим случай, когда $\Delta(t) = 0$.

Предложение 2. Магистраль оптимизационной задачи динамической модели существует и задается формулой $y^*(t) = -b(t)/a(t)$, если для всех моментов времени t из интервала $[0, T]$ верно следующее. Во-первых, $\Delta(t) = 0$ только если

$$\left(\gamma(t) - \beta(t)\right)\left(q(t) - \frac{1}{s(t)}\left(1 - \frac{ds(t)}{dt}\right)\right) < 0\,.$$

Во-вторых, можно выбрать коэффициенты q и s так, что при фиксированных остальных коэффициентах $\Delta(t) = 0$. Тогда неравенство $0 < y(t) < h(t)$ справедливо, если:

1. $\gamma > \beta$ (то есть $a > 0$) и либо $\beta > 0$ и $\gamma > 2\beta$, либо $\beta < 0$ и $\gamma > \beta/2$;
2. $\gamma < \beta$ (то есть $a < 0$) и либо $\beta > 0$ и $\gamma < \beta/2$, либо $\beta < 0$ и $\gamma < 2\beta$.

3.3. Некоторые частные случаи

Разберем некоторые частные случаи задания коэффициентов (11).

Пусть $a = 0$. Тогда $\beta = \gamma$, $b = \alpha\sigma$ и $y = -c/2b$. Отсюда найдем, что неравенство $0 < y(t) < h(t)$ будет выполнено, если либо $\beta = \gamma > 0$ и $(1 - ds/dt)/s - q < -\alpha\beta h^2/m$, либо $\beta = \gamma < 0$ и $(1 - ds/dt)/s - q > -\alpha\beta h^2/m$.

Пусть $b = 0$. В этом случае $\beta = \gamma/2$, $a = 3\alpha\beta/m$ и $y = (-ac)^{1/2}/a$, откуда $a > 0$ и, следовательно, $\beta > 0$. Функция $y(t)$ будет лежать в нужных границах, если $\beta \geqslant 0$, $\beta = \gamma/2$ и $(1 - ds/dt)/s - q > \alpha\beta h^2/m$.

Пусть $c = 0$ и $a \neq 0$. Здесь $\beta = (m/\alpha h^2)[(1 - ds/dt)/s - q]$ и $y = -2b/a$. Неравенство $0 < y(t) < h(t)$ будет справедливо, если при $\beta \geqslant 0$ либо $\gamma > 2\beta$, либо $\gamma < \beta/2$, а при $\beta \leqslant 0$ либо $\gamma > \beta/2$, либо $\gamma < 2\beta$.

Рассмотрим также более простую версию задачи прямого управления, в которой информационный фактор сигнала обратной связи $v(t)$ отсутствует. Вместо системы дифференциальных уравнений (1) динамика модели описывается лишь одним первым уравнением

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(t)x(t)y(t) - q(t)x(t) - u(t).$$

В остальном модель не меняется. Остаются прежними методы построения магистрали и оптимального процесса. Возьмем, как и раньше, вспомогательную функцию $\phi(y(t))$ в виде $\phi(y(t)) = s(t)y(t)$ и запишем функцию $R(t, y(t))$. Имеем

$$R\left(t, y(t)\right) = -\alpha(t)s(t)y^2(t) + \left[s(t)\left(\alpha(t)h(t) + q(t)\right) + \frac{ds(t)}{dt} - 1 \right] y(t) - s(t)q(t)h(t).$$

Дифференцируя функцию $R(t, y(t))$ и приравнивая производную нулю, получим выражение для магистрали

$$y^*(t) = \frac{h(t)}{2} + \frac{1}{2\alpha(t)}\left(q(t) - \frac{1}{s(t)}\left(1 - \frac{ds(t)}{dt}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что эта функция доставляет $R(t, y(t))$ максимум. Для того чтобы обе группы населения были полны, $0 < y(t) < h(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно выполнения неравенств

$$-\alpha(t)\, h(t) < \frac{1}{s(t)}\left(1 - \frac{ds(t)}{dt}\right) < \alpha(t)h(t).$$

Отвечающее магистрали управление вычисляется, как и ранее, из уравнения динамики: $u^*(t) = dy^*(t)/dt - (\alpha(t)\, y^*(t) - q(t))x^*(t)$, $x^*(t) = h(t) - y^*(t)$.

4. Задача непрямого управления

Гораздо более интересна, однако, задача непрямого управления, в которой численности групп воздействуют на сигнал обратной связи не непосредственно, а косвенно — через зависимость от них скорости его изменения. Задача непрямого управления оказывается значительно более сложной. Алгоритм решения двумерных линейных по управлению задач приведен в (Krotov, 1996). К сожалению, для рассматриваемой динамической системы пока не удается проверить свойства, служащие основой применимости алгоритма. Поэтому здесь мы только кратко опишем основные этапы схемы достаточных условий оптимальности для задачи непрямого управления.

Несколько упростим задачу оптимизации. А именно, будем предполагать, что численность населения постоянна: $h(t) = h = const$, и функция $s(t)$ в (4), а также и все коэффициенты системы уравнений (1) не зависят от времени (то есть эта система автономна). Кроме того, ограничение (2) заменим условием $0 \leqslant u(t) \leqslant u_1(y(t), v(t))$, и не будем фиксировать терминальное время T.

Требуется определить допустимый процесс $\{y^*(t),\ v^*(t),\ u^*(t),\ T^*\}$ и такую непрерывно дифференцируемую решающую функцию $\phi(y(t), v(t))$, что построенная с ее помощью функция $R(y(t), v(t), u(t))$ обладала бы следующим свойством

$$R(y^*(t), v^*(t)) = \max_{0<y<h, 0\le u\le u_1} R(y(t), v(t), u(t)) = 0, t \in (0, T^*).$$

Здесь $R(y(t), v(t), u(t)) = R_1(y(t), v(t))\, u(t) + R_2(y(t), v(t))$,

где $R_1(y(t), v(t)) = \dfrac{\partial\phi(y(t), v(t))}{dy}(-\alpha y^2(t)v(t) + (\alpha h v(t) + q) y(t) - qh) +$

$$+\frac{\partial\phi(y(t), v(t))}{\partial v}((\gamma-\beta)\, y(t) - mv(t) + \beta h) - y(t), \quad R_2(y(t), v(t)) = \frac{\partial\phi(y(t), v(t))}{dy} - s.$$

Тогда, в соответствии с описанным выше принципом оптимальности, набор $\{y^*(t), v^*(t), u^*(t), T^*\}$ представляет оптимальный процесс и терминальный момент времени.

Определим функцию $\phi(y(t), v(t))$ из следующих двух уравнений:

$$R_1(y(t), v(t)) = 0, \quad \max_{0<y<h, 0\le u\le u_1} R_2(y(t), v(t)) = 0. \tag{16}$$

Если решающая функция $\phi(y(t), v(t))$ с нужными свойствами существует, то максимум функции $R(y(t), v(t), u(t))$ по управлению будет достигаться на кусочно-гладком управлении $u^*(y(t), v(t))$. В силу (16) и определения функции $R(y(t), v(t), u(t))$, имеем:

$$\max_{0\le u\le u_1} R(y(t), v(t), u^*(t)) = 0, \quad u^*(y, v) = 0$$

$$\text{при } R_2 < 0 \text{ и } u^*(y, v) \in \left[0, u_1\right] \text{ при } R_2 = 0.$$

Пусть нам известен момент времени T^* и непрерывные и кусочно-непрерывно дифференцируемые траектории $\{y^*(t), v^*(t)\}$, такие что $y^*(t)$ удовлетворяет граничным условиям (3) и ограничениям $0 \leqslant y^*(t) \leqslant h(t)$. Предположим также, что траектории состоят из отрезков двух типов. На отрезках первого типа они являются решениями системы уравнений (1) при $u(t) = 0$. Второй тип отрезков представляет собой решения уравнения $R_2(y(t), v(t)) = 0$. Управления, соответствующие этим отрезкам траектории, определяются из уравнения (14). Если вычисленные при помощи (14) управления $u^*(t)$ удовлетворяют ограничениям $0 \leqslant u^*(t) \leqslant u_1(y(t), v(t))$, то процесс $\{y^*(t), v^*(t), u^*(t), T^*\}$ окажется оптимальным. Заметим, что более общий вид ограничений на управление $u_0(y(t), v(t)) \leqslant u(t) \leqslant u_1(y(t), v(t))$, сводится к рассматриваемым ограничениям при помощи замены функции управления: $w(t) = u(t) - u_0$.

Служащее для построения решающей функции $\phi(y(t), v(t))$ уравнение $R_1(y(t), v(t)) = 0$ представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Такие уравнения решаются методом характеристик. В соответствии с предложенным в (Krotov, 1996) алгоритмом, решающая функция строится в системе координат, связанных с характеристиками (лучевые координаты). Для реализации алгоритма построения магистрали и оптимального процесса требуется либо знание первых интегралов уравнений (1) при $u(t) = 0$, либо решений специально сконструированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена и исследована модель социальной системы, состоящей из двух групп населения. Переходы между группами возможны как в результате самоорганизации, так и под действием внешнего регулирования. Динамика процесса самоорганизации и внешнего регулирования представлена двумерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная модель может использоваться, например, для управления распространением эпидемии с учетом вирулентности возбудителя, для регулирования внутренней миграции с целью обеспечения заданного уровня занятости населения или для управления процессом формирования социальных сетей.

Для исследования модели используется математический аппарат теории оптимального управления. Рассматриваются как задача прямого управления системой (когда величина сигнала обратной связи постоянна во времени), так и задача непрямого управления (когда величина сигнала обратной связи нестационарна). В случае прямого управления было показано существование магистрали, установлены ограничения на параметры модели, достаточные для существования магистрали, а также проанализированы условия, позволяющие с помощью магистрали построить оптимальный процесс регулирования численностей социальных групп. В случае непрямого управления, обсуждается применение схемы достаточных условий оптимальности для автономной системы (параметры которой не зависят от времени).

Источники

Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М., 1979.

Андреева В. А., Цирулева В. М. Оптимальное управление процессом распространения эпидемии // Применение функционального анализа в теории приближений. Вып. 18. Тверь, 1997.

Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., 1974.

Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Егоров А. И. Основы теории управления. М., 2004.

Колесин И. Д. Анализ механизма внутренней миграции с учетом эндогенного фактора // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48. № 3. С. 121–125.

Колесин И. Д. Принципы моделирования социальной самоорганизации. М.; СПб.; Краснодар, 2013.

Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М., 1973.

Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М., 2008.

Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., 1978.

Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory. New York, 1996.

References

Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal’noe upravlenie* [*Optimal control*]. Moscow, 1979. (In Russian)

Andreeva V. A., Ciruleva V. M. *Optimal’noe upravlenie processom rasprostraneniya epidemii. Primenenie funkcional’nogo analiza v teorii priblizhenij* [*Optimal control of the spread of the epidemic Functional analysis application in the approximation theory*], iss. 18. Tver, 1997. (In Russian)

Egorov A. I. *Osnovy teorii upravleniya* [*Control theory fundamentals*]. Moscow, 2004. (In Russian)

Fedorenko R. P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal’nogo upravleniya* [*Approximate solutions for optimal control problems*]. Moscow, 1978. (In Russian)

Kolesin I. D. Analiz mekhanizma vnutrennej migracii s uchetom endogennogo faktora [Analysis of the internal migration mechanism under endogenous factor]. *Ekonomika i mat. metody* [*Economics and mathematical methods*], 2012, vol. 48, N 3, pp. 121–125. (In Russian)

Kolesin I. D. *Principy modelirovaniya social'noj samoorganizacii* [*Social self-organization modeling methods*]. Moscow-Saint-Petersburg-Krasnodar, 2013. (In Russian)

Krotov V. F. *Global methods in optimal control theory*. New York, 1996.

Krotov, V. F. Gurman V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [*Optimal control methods and problems*]. Moscow, 1973. (In Russian)

Lagosha B. A., Apal'kova T. G. *Optimal'noe upravlenie v ekonomike: teoriya i prilozheniya* [*Optimal control in economics: theory and applications*]. Moscow, 2008. (In Russian)

Vasil'ev F. P. *Chislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach* [*Numerical methods for solving optimization problems*]. Moscow, 1988. (In Russian)

Vasil'ev F. P. *Lekcii po metodam resheniya ekstremal'nyh zadach* [*Lectures on methods for solving optimization problems*]. Moscow, 1974. (In Russian)