

# ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ

**М. А. Богданова**

инженер Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I

**А. М. Уздин**

докт. техн. наук, профессор Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I

**В. П. Чернов**

докт. экон. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного экономического университета

## К ВОПРОСУ О СУММИРОВАНИИ УЩЕРБОВ ПРИ ОЦЕНКЕ РИСКОВ

Теория риска разработана под руководством лауреата Нобелевской премии, академика Л. В. Канторовича в 60-е годы прошлого века применительно к задачам теории сейсмостойкости (Канторович, Кейлис-Борок, Молчан, 1973, с. 3–20; Кейлис-Борок, Нерсесов, Яглом, 1962, с. 46). В основу теории положено понятие риска как математического ожидания ущерба. Базовой формулой для оценки риска  $R$  за  $N$  лет является его выражение через функцию уязвимости  $D$ .

$$R = \sum_{n=1}^N \sum_{I=I_{\min}}^{I_{\max}} D(I) \cdot L(I) \cdot (1+d)^{-n} \cdot (1-d^*)^n.$$

В этой формуле внешнее суммирование соответствует годам службы сооружения, а внутреннее — шкале интенсивности неблагоприятных событий. Функция  $D(I)$  — ущерб от события интенсивностью  $I$ , величина  $I$  меняется в пределах от  $I_{\min}$  до  $I_{\max}$ . Функция  $D(I)$  получила название функции уязвимости, а таблица значений этой функции — платежной матрицы. Величина  $L(I)$  — годовая повторяемость неблагоприятного события интенсивностью  $I$ . Множитель  $(1+d)^{-n}$  учитывает распределение затрат во времени, здесь  $d$  — норма эффективности капиталовложений. Дополнительно коэффициент  $(1-d^*)^n$ , учитывает уменьшение стоимости объекта со временем. Последние два множителя можно вынести за внутреннюю сумму, в результате формула для отдельного объекта, рассчитанного на воздействие интенсивностью  $K$ , получает вид

$$R(K) = f(N) \cdot \sum_{I=I_{\min}}^{I_{\max}} D(K, I) \cdot L(I), \quad (1)$$

где  $f(N) = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \cdot (1 - (1-k)^N)$ ;  $k = \frac{d+d^*}{1+d}$ .

Множитель  $f(N)$  в формуле (1) учитывает приведение затрат к настоящему времени (Кейлис-Борок, Нерсесов, Яглом, 1962, с. 46, Уздин и др., 2017, с. 176).

В дальнейшем рассматривались более сложные модели накопления повреждений. Например, при оценке рисков от пожаров, функция уязвимости зависит от двух параметров: огнестойкости конструкции и скорости подачи воды для тушения (Ильина, Сигидов, 2012, с. 48–53).

Важным является то, что ущерб, функция уязвимости и риск, измеряются в долях от стоимости сооружения. Это не позволяет просто суммировать риски при оценке ущерба для группы объектов, в частности, при оценке ущерба для урбанизированной территории. В работах (Богданова и др., 2013, с. 46–49, Богданова и др., 2014, с. 61–70) получена формула для оценки риска для группы

объектов (застроенной территории). При этом предполагается, что неблагоприятное событие одновременно затрагивает все объекты. В этом случае потребовалось ввести два вектора, характеризующих состав объектов группы. Первый вектор характеризует стоимости объектов,  $a = (1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_i = \frac{C_i}{C_1}$  — относительная стоимость  $i$ -го объекта,  $C_i$  — стоимость  $i$ -го объекта. Второй вектор,  $N = (1, v_2, \dots, v_n)$ , где  $v_i = \frac{n_i}{n_1}$  — относительное число  $i$ -х объектов,  $n_i$  — число  $i$ -х объектов,  $n$  — общее число объектов. В статье (Богданова и др., 2013, с. 46–49, Богданова и др., 2014, с. 61–70) для оценки риска сохранена формула (1), но в ней функция ущерба  $D(K, I)$  — функция уязвимости для группы объектов в долях от стоимости всей группы. Эта функция выражается через функции уязвимости членов группы

$$D(K, I) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i v_i D(K, I, i)}{\sum_{i=1}^n a_i v_i}, \quad (2)$$

где  $D(K, I, i)$  — функция уязвимости для объекта  $i$ .

Формула (2) предполагает, что все объекты группы проектируются на воздействие силой  $I = K$ .

Предложенной Л. В. Канторовичем оценки математического ожидания ущерба (риска) недостаточно для анализа эффективности инвестирования и развития страхования. Как минимум необходимо оценить дисперсию ожидаемых ущербов. При этом следует иметь в виду, что в этом случае приходится работать с условной вероятностью. Вероятность превышения ущербом заданной величины  $Loss$  от воздействия интенсивностью  $I$  определяется формулой условной вероятности

$$P(Loss, I) = P(I) \cdot P(Loss|I), \quad (3)$$

$P(I)$  — вероятность возникновения события интенсивностью более  $I$ ;  $P(Loss|I)$  — вероятность превышения ущербом величины  $Loss$  при условии, что событие произошло.

Вместо формул условной вероятности авторами (Уздин и др., 2017, Богданова и др., 2014, с. 61–70) в качестве функции плотности распределения (ф.п.р.) введен  $\delta$ -корректированный процесс. В начале процесса введена  $\delta$ -функция, сдвинутая на бесконечно малую величину вправо. Обозначим ее через  $\delta(x - 0)$  так, чтобы

$$\int_0^{\infty} \delta(x - 0) dx = 1. \quad (4)$$

Для статистического описания потерь предложено использовать  $\delta$ -корректированную функцию распределения, показанную на рис. 1 и имеющую вид

$$f(x) = (1 - L) \cdot \delta(x - 0) + L \cdot p(x), \quad (5)$$

где  $L$  — вероятность возникновения неблагоприятного события;  $p(x)$  — функция плотности распределения (ф.п.р.) события при условии, что оно произошло.

В дальнейшем для сокращения записей вместо  $\delta(x - 0)$  будем писать  $\delta(x)$ .

Площадь под  $\delta$ -функцией, с учетом множителя  $1 - L$ , равна вероятности того, что неблагоприятное событие не произойдет, т. е. равна  $1 - L$ . В приведенном на рис. 1 примере принято  $L = 0,001$ , средняя величина ущерба при условии, что неблагоприятное событие произойдет  $D = R = 0,3$  и среднеквадратичное отклонение для функции ущерба  $D$ ,  $\sigma_D = 0,17$ .

Применяя формулы математического ожидания и дисперсии к распределению (5), получим следующие формулы математического ожидания  $R$  и дисперсии годового ущерба (потерь)  $\sigma_L^2$  для единичного события:

$$R = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = D \cdot L, \quad (6)$$

$$\sigma_L^2 = \int_0^{\infty} (R-x)^2 f(x) dx = L \cdot [\sigma_D^2 + R^2 \cdot (1-L)], \quad (7)$$

где  $R$  и  $\sigma_D$  — математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение ущерба при условии, что событие произошло.

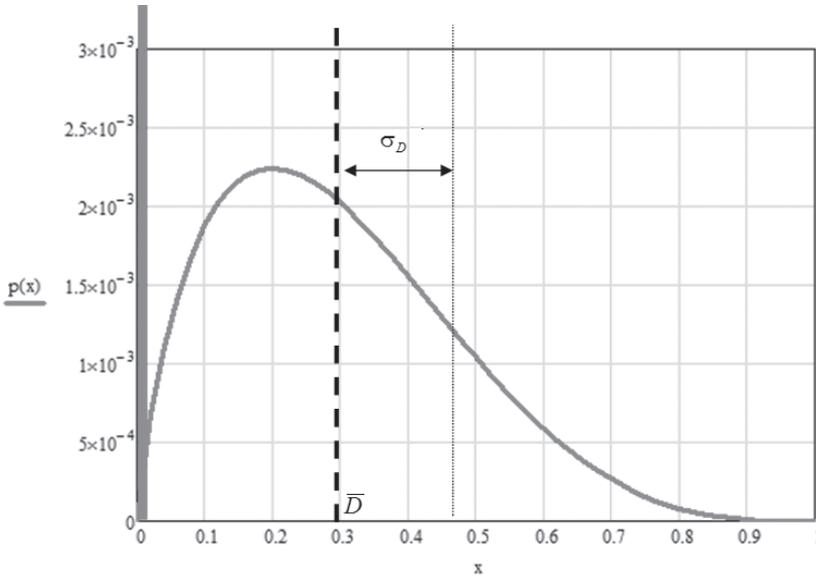


Рис. 1. Пример ф.п.р. годового ущерба при  $L = 0,001$ ,  $\bar{D} = 0,3$  и  $\sigma_D = 0,17$

Если считать, что  $L \ll 1$ , то формулу (7) можно преобразовать к виду

$$\sigma_L^2 = L \cdot [\sigma_D^2 + R^2]. \quad (8)$$

Квадрат коэффициента вариации для годового ущерба при этом имеет вид

$$V_L = \frac{\sigma_D^2}{R^2} = \frac{V_D + 1}{L}. \quad (9)$$

В формуле (8)  $V_D$  — коэффициент вариации для ущерба при условии, что событие произошло.

Для получения формулы дисперсии для группы объектов обратимся сперва к ф.п.р. потерь в группе объектов. Ф.п.р. существенно зависит от того, рядом или нет, расположены объекты.

В первом случае неблагоприятное событие вызовет ущерб одновременно у всех объектов. Величина же ущерба различных объектов считается статистически независимой. В этом случае ф.п.р. суммы ущерба при условии, что событие произошло, будет представлять собой свертку ф.п.р. отдельных событий  $p_i$ . Для двух объектов эта формула имеет вид:

$$p(x)_{Loss1 \cup Loss2} = (1-L)\delta(x) + L \cdot \int_0^x p_1(z) p_2(x-z) dz = (1-L)\delta(x) + L \cdot p_1 \otimes p_2 \quad (10)$$

Здесь символом  $\otimes$  обозначена свертка функций.  
Для нескольких объектов формула примет вид

$$p(x)_{Loss1 \cup Loss2 \cup \dots \cup LossN} = (1-L)\delta(x) + L \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N. \quad (11)$$

Рассматриваемый случай относится к суммированию ущербов от нескольких объектов при событии одной интенсивности, например, при оценке суммы потерь для двух зданий при землетрясении заданной интенсивности.

Как известно (Уздин и др., 2017; Lallemand, Kiremidjian, 2015, p. 1337–1352), потери отдельного объекта при землетрясении хорошо описываются с помощью  $\beta$ -распределения. На рис. 2 приведены ф.п.р. распределения потерь для кирпичного здания без усиления  $p(x)$  и усиленного на 7 баллов  $q(x)$  от 7-балльного землетрясения.

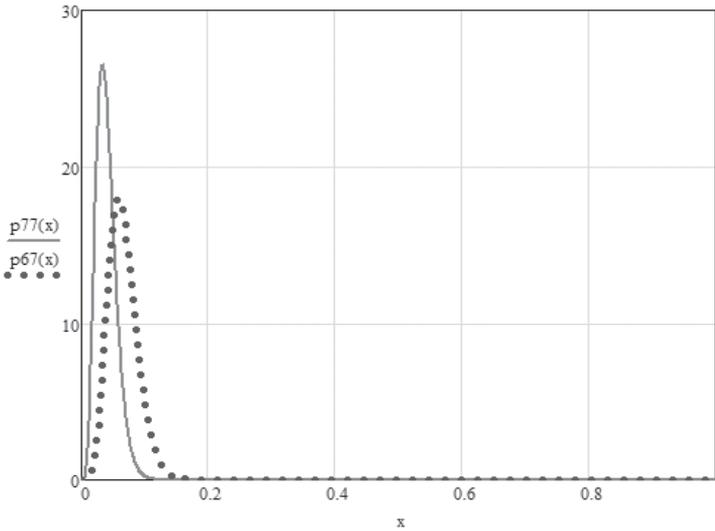


Рис. 2. Ф.п.р. потерь от 7-балльного землетрясения для кирпичного здания без усиления (точечная кривая) и усиленного на 7 баллов (сплошная кривая)

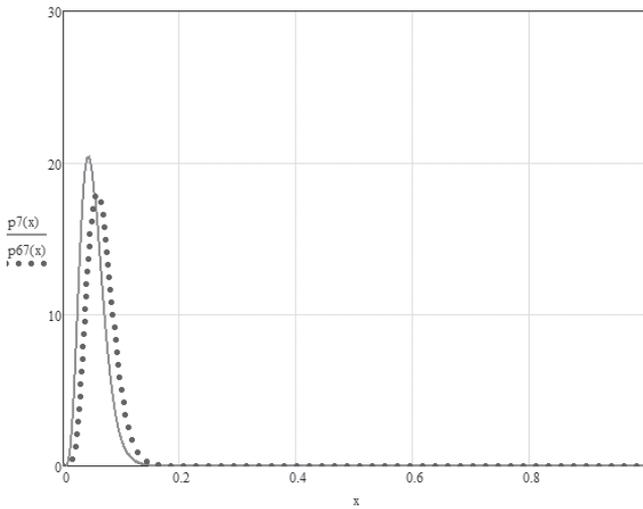
Следует иметь в виду, что каждая кривая построена в долях от стоимости объекта. Если принять, что стоимость усиленного здания на 30% выше, то после приведения потерь к измерению в долях от стоимости неусиленного здания вместо  $q(x)$  получим новую ф.п.р. (рис. 3):

$$r(x) = \frac{f\left(\frac{x}{k}\right)}{k}, \text{ где } k = 1, 3. \quad (12)$$

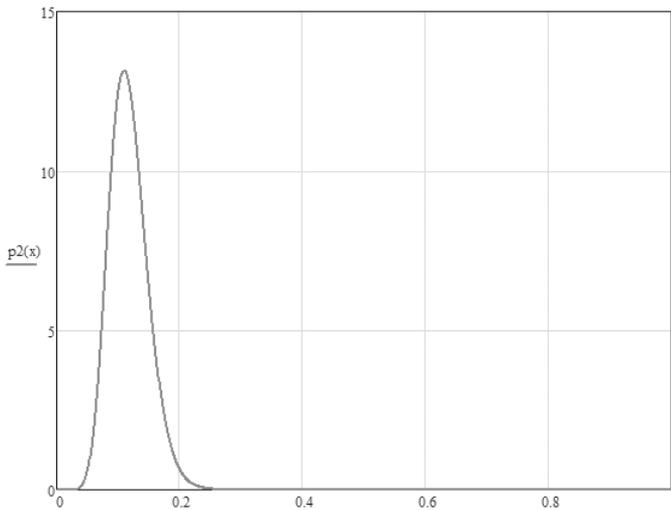
После приведения ф.п.р. к одним единицам измерения потерь переходим к ф.п.р. их суммы (рис. 4).

Следует подчеркнуть, что ф.п.р. суммы, полученная по формуле (10), теряет свойства исходных распределений. В нашем случае это не будет  $\beta$ -распределением и при выбранной единице измерения потерь ф.п.р. будет распределена на участке от 0 до 2,3. Последняя точка соответствует потери двух зданий, причем второе в 1,3 раза дороже первого.

Таким образом, при оценке ущерба для группы рядом расположенных объектов можно рассматривать эту группу, как один объект с ф.п.р., равной свертке ф.п.р. составляющих.



**Рис. 3.** Ф.п.р. потерь от 7-балльного землетрясения для кирпичного здания без усиления (точечная кривая) и усиленного на 7 баллов (сплошная кривая) после приведения их к одним единицам измерения потерь



**Рис. 4.** Ф.п.р. суммарных потерь от 7-балльного землетрясения для двух зданий

Перейдем теперь к случаям, когда процессы не коррелированы. Это суммирование по объектам, которые разнесены друг от друга, а также суммирование по событиям во времени, в предположении, что после события объект полностью восстанавливается до первоначального уровня и ущерб от нового события не зависит от предшествующей истории. В этом случае ф.п.р. суммы событий будет свертка ф.п.р. типа (5). Если рассмотреть два события  $X$  и  $Y$  с ф.п.р.  $f_x$  и  $f_y$ :

$$f_x(x) = (1 - Lx) \cdot \delta(x) + Lx \cdot p(x), \quad f_y(x) = (1 - Ly) \cdot \delta(x) + Ly \cdot q(x), \quad (13)$$

то получим

$$f(x)_{x \cup y} = \int_0^x [(1 - Lx) \cdot \delta(z) + Lx \cdot p(z)] \cdot [(1 - Ly) \cdot \delta(x - z) + Ly \cdot q(x - z)] dz = \\ = (1 - Lx)(1 - Ly) \delta(x) + Lx \cdot (1 - Ly) p(x) + Ly \cdot (1 - Lx) q(x) + Lx \cdot Ly \cdot p \otimes q \quad (14)$$

Если учесть, что  $Lx \ll 1$  и  $Ly \ll 1$ , то можно записать

$$f(x)_{x \cup y} \approx (1 - (Lx + Ly))\delta(x) + Lx \cdot p(x) + Ly \cdot q(x). \quad (15)$$

Для  $n$  независимых событий получим формулу

$$f(x)_{x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n} \approx (1 - \sum_{i=1}^n L_i)\delta(x) + \sum_{i=1}^n L_i p_i(x). \quad (16)$$

Здесь  $L_i$  вероятность  $i$ -го события, а  $p_i(x)$  — его ф.п.р.

В качестве примера на рис. 5 приведены функции ущерба для кирпичного здания, усиленного на сейсмические воздействия силой 7 и 9 баллов. На рис. 6 приведены ф.п.р. ущерба для этих зданий в районе с повторяемостью 7-балльных землетрясений раз в 500 лет, 8-балльных — раз в 200 лет, 9-балльных — раз в 500 лет и 10-балльных — раз в 1000 лет.

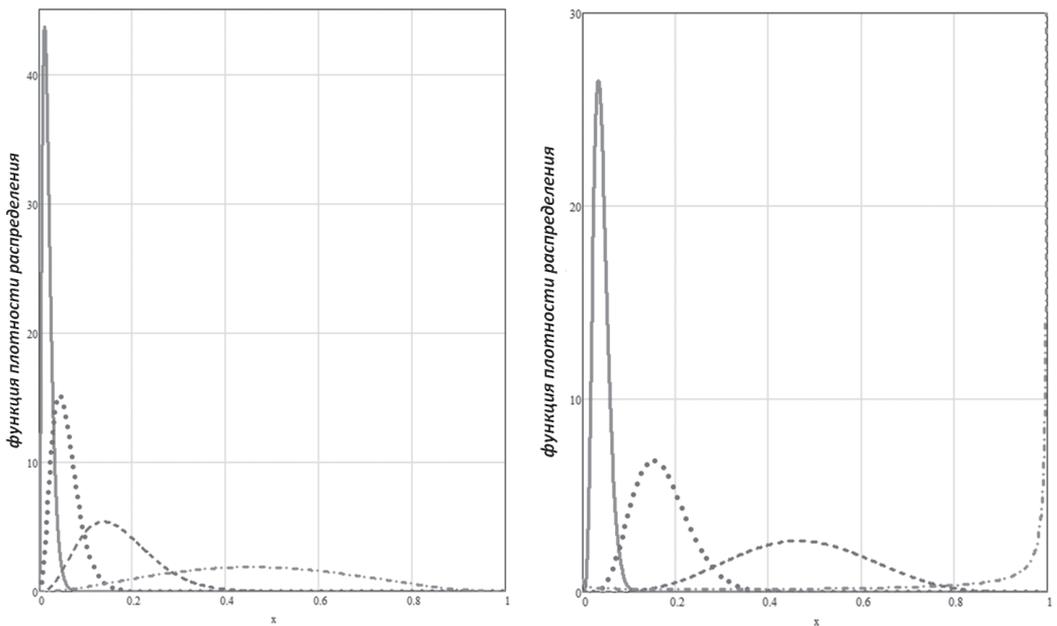


Рис. 5. Ф.п.р. для ущербов зданий, усиленных на землетрясения силой 9 (слева) и 7 баллов от землетрясений различной силы. Сплошная линия от землетрясения силой  $I = 7$  баллов, точечная линия —  $I = 8$  баллов, пунктир —  $I = 9$  баллов, штрих-пунктир —  $I = 10$  баллов

Следует отметить, что ф.п.р., получаемые по формуле (16), могут быть полиэкстремальными. Такая ситуация наблюдается на ф.п.р. в правой части рис. 6. Экстремумы выделены на графике ромбовидной точкой. Эти экстремумы могут иметь достаточно ясный физический смысл. Например, при анализе поврежденной застройки от обстрела из орудий разного калибра каждый экстремум (ущерб) соответствует своему калибру. Однако в ряде случаев это не так. Например, при землетрясениях мы используем для характеристики силы целочисленные баллы. Первый экстремум на ф.п.р. соответствует ущербу от землетрясений силой 7 баллов, а второй — 8 баллов. Поскольку эти пики локализованы на своих ф.п.р. на суммарной ф.п.р. образуется минимум между ущербами. На самом деле интенсивность сейсмического воздействия — непрерывная величина. Этот вопрос поднимался авторами в литературе (Богданова и др., 2016, с. 22–30). Во избежание

неточностей в этом случае в формуле (16) соответствующую сумму следует заменить интегралом.

Приведем формулы для математического ожидания (риска) и дисперсии при суммировании ущербов.

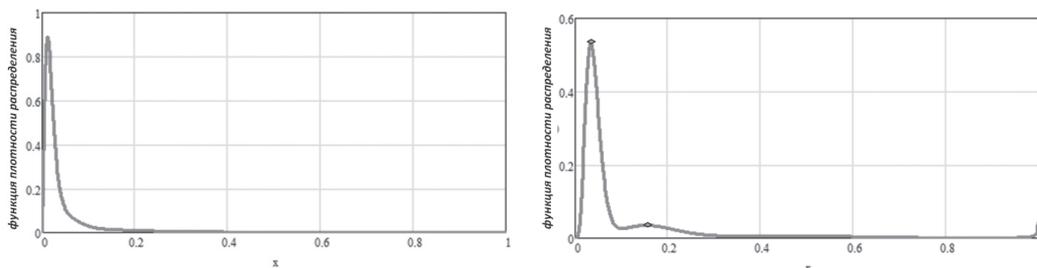


Рис. 6. Ф.п.р. для ущербов зданий, усиленных на землетрясения силой 9 (слева) и 7 баллов от землетрясений, возможных на площадке строительства ( $\delta$ -функция в начале координат не показана)

Для группы рядом расположенных объектов математическое ожидание общих потерь  $R_L$  и их дисперсия  $\sigma_L^2$  оцениваются по формулам:

$$R_L = \sum_{i=1}^n R_i = L \cdot \sum_{i=1}^n D_i = L \cdot D_s, \quad (17)$$

где функция уязвимости вычисляется по формуле (2) для группы объектов.

$$\sigma_L^2 \approx L \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{D_i}^2 + R_L^2 \right). \quad (18)$$

Для группы независимых объектов или событий общие потери и их дисперсия оцениваются по формулам

$$R_L = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n L_i D_i, \quad (19)$$

$$\sigma_L^2 \approx \sum_{i=1}^n L_i \left[ \sigma_{D_i}^2 + D_i^2 \right] - R_L^2 \approx \sum_{i=1}^n L_i \left[ \sigma_{D_i}^2 + D_i^2 \right]. \quad (20)$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации сказанного простой пример. Предположим, что мы размещаем группу из 50 рабочих в место временного проживания. Здание для размещения заражено инфекцией с вероятностью  $L = 0,1$ . В изолированной группе в зараженном здании заболевает в среднем 5% рабочих. Заражение имеет нормальный закон распределения со среднеквадратичным отклонением 2%. Ущерб от одного заражения составляет 50 долл. Возможны три способа заселения: всех разместить вместе в одном здании (самый дешевый); всех разместить в одном здании, разделив на изолированные группы по 10 человек; или же разделить всех на 5 групп по 10 человек и разместить группы в отдельных зданиях.

Математическое ожидание ущерба во всех случаях составит 12,5 долл. Каждое размещение в отдельном доме является событием. В первых двух случаях мы рассматриваем одно событие (размещение в доме). В третьем случае рассматривается 5 событий. Дисперсии в этих случаях существенно различаются. Возьмем за основу ф.п.р.  $f(x)$  заражения в группе из 10 человек при условии, что заражение произошло. Это нормальное распределение с математическим ожиданием 25 долл. и среднеквадратичным отклонением 10 долл. (дисперсией 100).

Группа из 50 человек будет иметь распределение  $\varphi(x) = \frac{f\left(\frac{x}{5}\right)}{5}$  или, что то же самое, нормальное распределение с математическим ожиданием, равным сумме математических ожиданий первого процесса 125 долл. и среднеквадратичным отклонением, равным сумме отклонений первого процесса 50 долл. (дисперсией 2500).

Пять групп по 10 человек характеризуются нормальным распределением с математическим ожиданием, равным сумме математических ожиданий первого процесса 125 долл. и дисперсией, равной сумме дисперсий первого процесса 500 (среднеквадратичное отклонение  $\sqrt{500} = 22,36$ ).

Ф.п.р. для третьего процесса описывается формулой (16). Учитывая, что мы рассматриваем 5 независимых одинаковых процессов, формула примет вид

$$f(x)_{x_1 \cup x_2 \cup x_n \dots} \approx (1 - \sum_{i=1}^n L_i) \delta(x) + \sum_{i=1}^n L_i p_i(x) = (1 - nL) \delta(x) + nLf(x), \quad (21)$$

где  $n = 5$ .

Заметим, что при переходе к условной вероятности площадь под  $\delta$ -функцией с множителем составит 0,1, а в третьем процессе 0,5.

Ф.п.р для рассматриваемых случаев приведены на рис. 7.

Таблица 1

Параметры ф.п.р. при различном размещении рабочих

	В одном здании		5 зданий
	размещение вместе	размещение раздельно	
Число событий, $n$	1	1	5
Вероятность заражения здания, $L$	0,1	0,1	0,1
Дисперсия ущерба при единичном событии	50	22,36	10
Математическое ожидание ущерба (Риск)	12,5	12,5	12,5
Среднеквадратичное отклонение с учетом вероятности возникновения ущерба	16,25	8,004	4,905
Коэффициент вариации	1,69	0,41	0,154

В табл. 1 приведен подсчет дисперсии и среднеквадратичного отклонения для рассмотренных случаев.

Отметим, что ущерб с вероятностью превышения 3% составляет в первом случае 151 долл., во втором случае 136,5 долл. и в третьем случае 40,5 долл.

Отметим еще один аспект проблемы. На рис. 8 приведена ф.п.р. ущерба для рассмотренных случаев.

Эта функция иллюстрирует факт, что принятие того или иного решения, ведущего к разному суммированию ущербов, зависит от склонности к риску лица, принимающего решение собственника, чиновника или военачальника. Если вероятность опасного события в 10% считать приемлемой, то проходит самое простое первое решение, в нашем случае размещение всех людей в одном здании без разделения на группы. До приемлемой вероятности ущерба 9,95% лучшим остается первое решение (точка А на рисунке). Если приемлемый риск меньше указанной величины, оптимальным становится третье решение с раздельным размещением. Интересно, что при невозможности его реализации первой решение оказывается наилучшим до приемлемой вероятности ущерба 5% (точка В на рисунке). При меньшей вероятности оптимальным становится второе решение.

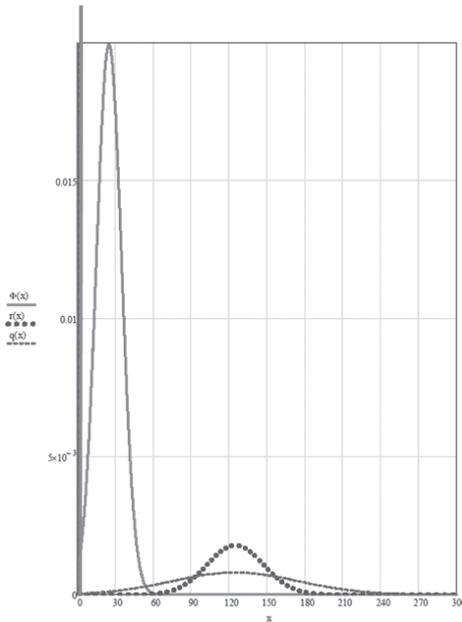


Рис. 7. Ф.п.р. ущерба от заражения людей при их размещении вместе в одном здании — пунктирная кривая, раздельно в одном здании — точечная кривая, в разных зданиях — сплошная кривая

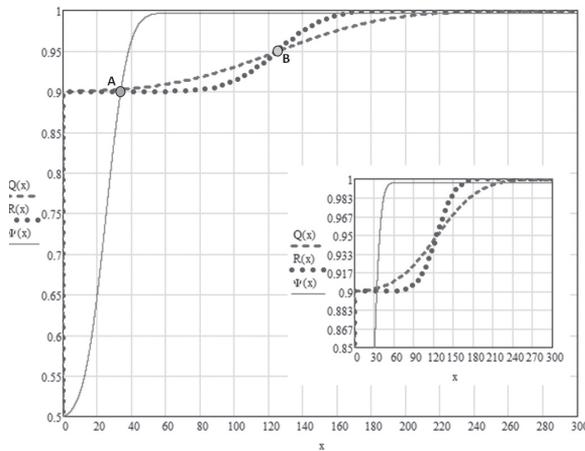


Рис. 8. Ф.п.р. ущерба от заражения людей при их размещении вместе в одном здании — пунктирная кривая, раздельно в одном здании — точечная кривая, в разных зданиях — сплошная кривая

Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Для оценки опасности тех или иных решений совершенно недостаточно знания лишь математического ожидания ущерба (риска). Необходимо знать дисперсию и ф.п.р. рассматриваемого ущерба.

2. Ф.п.р. и дисперсия ущерба для группы объектов существенно зависит от особенностей реализации событий, вызывающих ущерб. При этом следует разделять случаи:

- когда событие охватывает группу объектов и одновременно вызывает у них ущерб. При этом величина ущерба у разных объектов статистически независима.
- когда мы имеем дело со статистически независимыми событиями.

Примером учета таких событий являются страхование от землетрясений в одном городе и в разных городах.

3. Разница при работе с возможными ущербами группы объектов, например, при страховании, очень сильно зависит как от количества объектов, подверженных одному событию, так и от возможности разделения самих событий. Во всех случаях (при равном числе объектов) разделение событий приводит к увеличению вероятности неблагоприятного события, но при этом резко снижается дисперсия прогноза ущерба, что в конечном итоге упрощает прогноз рисков.

4. Выбор того или иного решения, определяющего способ суммирования ущербов, определяется степенью склонности к риску лица, принимающего решение. Если приемлемая вероятность ущерба больше  $L$ , то его можно вообще не принимать во внимание.

## Источники

Богданова М. А., Огнева С. С., Уздин А. М., Чернов В. П. Оценка доверительных границ для величины риска // Природные и техногенные риски // Безопасность сооружений. 2013. № 3. С. 46–49.

Богданова М. А., Рохманова М., Уздин А. М., Чернов В. П. Оценка ценового коридора для страхования редких событий // Финансы и бизнес. 2014. № 3. С. 61–70.

Богданова М. А., Сигидов В. В., Уздин А. М., Чернов В. П. Статистические характеристики ущерба в теории риска // Современная экономика: проблемы и решения. 2016. № 5. С. 22–30.

Ильина Д. А., Сигидов В. В. Использование методов теории риска и многомерных функций уязвимости для оценки эффективности противопожарных мероприятий // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2012. № 6. С. 48–53.

Канторович Л. В., Кейлис-Борок В. И., Молчан Г. И. Сейсмический риск и принципы сейсмического районирования. // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. Вычисл. Сейсмология. Вып. 6. М., 1973. С. 3–20.

Кейлис-Борок В. И., Нерсесов И. А., Яглом А. М. Методы оценки экономического эффекта сейсмостойкого строительства. М., 1962.

Уздин А. М., Воробьев В. А., Богданова М. А., Сигидов В. В., Ваничева С. С. Экономика сейсмостойкого строительства. М., 2017.

Lallemant D., Kiremidjian A. A Beta Distribution Model for Characterizing Earthquake Damage State Distribution // Earthquake Spectra. 2015. Vol. 31. Iss. 3. P. 1337–1352.

## References

Bogdanova M. A., Roxhmanova M., Uzdin A. M., Chernov V. P. Ocenka cenovogo koridorora dlya straxovaniya redkix sobitii [Estimation of the price corridor for insurance of rare events]. *Finansi i biznes [Finance and Business]*, 2014, N 3, pp. 61–70. (In Russian)

Bogdanova M. A., Sigidov V. V., Uzdin A. M., Chernov V. P. Statisticheskie karakteristiki ucherba v teorii riska [Statistical characteristics of damage in risk theory]. *Sovremennaya ekonomika: problemi i resheniya [Modern Economics: Problems and Solutions]*, 2016, N 5, pp. 22–30. (In Russian)

Bogdanova M. A., Ogneva S. S., Uzdin A. M., Chernov V. P. Ocenka doveritelnix granic dlya velichini riska [Assessment of confidence limits for the magnitude of risk]. *Prirodnie i rexnogennie riski. Bezopasnosti soorujenii [Natural and technogenic risks. Safety of structures]*, 2013, N 3, pp. 46–49. (In Russian)

Ilina D. A., Sigidov V. V. Ispolzovanie metodov teorii riska i mnogomernix funkcii uyazvimiosti dliya ochenki effektivnosti protivopojarnix meropriyatii [Using the methods of risk theory and multidimensional functions of vulnerability to assess the effectiveness of fire-prevention measures]. *Prirodnie i texnogennie riski. Bezopasnosti soorujenii [Natural and technogenic risks. Safety of structures]*, 2012, N 6, pp. 48–53. (In Russian)

Kantorovich L. V., Keilis-Borok V. I., Molchan G. I. Seismicheskii risk i pncipi seismicheskogo raionirovaniya [Seismic risk and principles of seismic zoning]. *Vichislitelnie i Statisticheskie metodi interpretacii seismicheskix dannix. Vichisl. Seismologiya [Computational and statistical methods for the interpretation of seismic data. Calculated Seismology]*. N 6. Moscow, 1973, pp. 3–20. (In Russian)

Keilis-Borok V. I., Nersesov I. A., Yaglom A. M. *Metodi ochenki ekonomicheskogo effecta seismicheskogo stroitelstva [Methods for assessing the economic effect of earthquake-resistant construction]*. Moscow, 1962. (In Russian)

Lallemant D., Kiremidjian A. A Beta Distribution Model for Characterizing Earthquake Damage State Distribution. *Earthquake Spectra*, 2015, vol. 31, iss. 3, pp. 1337–1352.

Uzdin A. M., Vorobiov V. A., Bogdanova M. A., Sigidov V. V., Vanicheva S. S. *Ekonomika seismostoikogo stroitelstva [Economics of earthquake-resistant construction]*. Moscow, 2017. (In Russian)