

Р. В. Гарафутдинов

аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике Пермского государственного национального исследовательского университета

Е. П. Гурова

канд. филол. наук, старший преподаватель кафедры журналистики и массовых коммуникаций Пермского государственного национального исследовательского университета, аспирант Института экономики Уральского отделения РАН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМИРОВАНИЮ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ МАРКОВИЦА С ПРИМЕНЕНИЕМ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Введение

Экономика России находится в одной из переходных фаз развития. На протяжении нескольких лет идут разговоры как в среде ученых, так и в сфере практиков о ее цифровизации, становлении экономики будущего и сопутствующих процессах «перестройки». С точки зрения ряда теоретиков и практиков, эти процессы вызваны закономерным переходом к постиндустриальному обществу. Однако переход от одной фазы развития к другой неоднороден. Если обратиться к экономической теории (в частности, теории научных революций Т. Куна), то этим объясняется и нестабильность экономики, и, как следствие, периодический вход в зоны экономических кризисов, и неоднородность развития и перестройки ряда сегментов финансового рынка (от начальных стадий индустриального уклада до явных признаков постиндустриального развития в ряде областей, включая те же процессы цифровизации экономики, нарастание доминантности сферы услуг и т. д.).

В указанных условиях инвестирование, столь характерное для рыночной экономики как форма получения дохода, приобретает иную роль, иную окраску. Наибольший интерес стабильно вызывают не вложение средств в банковские депозиты (для данного инструмента характерна практически единичная вероятность реализации риска потери средств ввиду сопоставимости, а то и превышения величиной инфляции предлагаемых банками процентных ставок по вкладам), а инвестирование в сектор ИТ, венчурное инвестирование и формирование инвестиционных портфелей на фондовых биржах. На данный момент более актуально не просто получение дохода, а гарантированность его в условиях нестабильности наряду с хеджированием финансовых рисков. Тем важнее разработка инновационных методов формирования инвестиционных портфелей, которые позволят получить более точный прогноз финансового результата. Как правило, наиболее распространенной, часто используемой является теория оптимального инвестиционного портфеля за авторством Г. Марковица (Markowitz, 1952). Она основана на максимизации доходности инвестиций при минимизации риска; реализуется в подборе совокупности финансовых инструментов с некоррелированными доходностями. Математическим воплощением понятия риска считается волатильность доходности, выраженная ее стандартным отклонением. Задачей инвестора в данном

случае становится поиск такой структуры портфеля, при которой соотношение совокупных доходности и риска оптимальны для данного набора активов.

Как правило, инвестиционный портфель формируется исходя из наблюдаемых, исторических доходностей активов. При решении задачи оптимизации структуры портфеля Марковица целевой функцией является его характеристика (доходность или риск), оцениваемая по массиву прошлых значений доходностей активов, составляющих портфель. Известно, что финансовые ценовые ряды нестационарны (Демин, Витяев, 2009; Загайнов, 2017), и доходность актива, в основе которой лежат курсовые разницы, практически не может быть константой в динамике. Более того, она может быть весьма непостоянной величиной. С этим связана проблема выбора таких инструментов инвестирования для формирования портфеля, поведение которых (а следовательно, и доходность) было бы достаточно предсказуемым. Одним из подходов к решению этой проблемы является фрактальный анализ финансовых рынков.

Согласно мнению некоторых авторов, наиболее адекватный математический аппарат для исследования сложного поведения финансовых показателей был разработан на основе фрактальной теории (Мансуров, 2008). Фрактал можно определить как структуру, части которой в определенном смысле подобны целому. Такие структуры встречаются как в природе (горы, береговая линия и т. д.), так и в экономике (графики динамики котировок, процентных ставок, риска и доходности и т. д.). Использование фрактального анализа при прогнозировании доходностей позволяет учесть взаимосвязи во временном ряду, сложное (неоднородное) поведение инвесторов, различные горизонты инвестирования участников рынка, отклонения от ценовых трендов. Важным моментом является то, что фрактальные характеристики временного ряда могут выступать в качестве показателей стабильности, предсказуемости его поведения (Бронштейн, Янчушка, 2007; Коноплева, 2015). Это их свойство можно использовать при отборе активов в инвестиционный портфель.

Основная гипотеза исследования состоит в том, что портфель, сформированный из активов с более стабильной, предсказуемой динамикой, обладает лучшими характеристиками (доходность, риск), чем портфель из активов с менее предсказуемой динамикой. При этом мерой предсказуемости являются фрактальные показатели ценовых рядов активов. Целью данной работы является проверка озвученной гипотезы.

Обзор литературы

Зачастую в научных работах о портфельном инвестировании вовсе не дается определения инвестиционного портфеля; любопытно, что и Г. Марковиц в своем знаменитом труде «Portfolio Selection» его не дал. Можно встретить, например, такое: инвестиционный портфель — это множество различных инвестиционных активов, направленных на достижение финансовой цели (Дмитриев, Тихонова, 2019). Как правило, для большинства инвесторов основной финансовой целью является получение прибыли. Идея портфельного инвестирования состоит в том, чтобы диверсифицировать риски от вложения в тот или иной актив: вероятность принесения убытков единственным активом куда выше, чем вероятность убыточности сразу нескольких. Соотношение усредненных доходности и риска оказывается более оптимальным, чем соотношение доходности и риска любого единичного актива. В широком смысле портфель можно рассматривать как набор любых активов, способных генерировать доход (например, реальных или

финансовых инвестиционных проектов); на практике же, как правило, говорят о портфеле финансовых активов, состоящем из финансовых инструментов: ценных бумаг, валюты, производных инструментов и т. д. В качестве своеобразных портфелей можно рассматривать биржевые индексы (например, индекс РТС) или паи инвестиционных фондов. Индекс, представляющий собой рыночный портфель, рассчитывается по определенной обнародованной биржей методике и призван служить индикатором текущего состояния в том или ином секторе финансового рынка, а не принести максимальную доходность при наименьшем риске инвестору, который бы вздумал вложиться в индексный фонд или повторить индекс самостоятельно, приобретя нужные активы в соответствующих пропорциях. Инвестиционный фонд отличается активным управлением средствами вкладчиков, он продает и приобретает активы в соответствии с некоторыми представлениями управляющих об оптимальной тактике инвестирования в зависимости от рыночной конъюнктуры. Также частный инвестор может собрать инвестиционный портфель самостоятельно, приобретя ценные бумаги или иные финансовые инструменты в некотором соотношении.

Использованию фрактального подхода при формировании инвестиционных портфелей посвящено не так много исследований. Так, Е. А. Косаревой предложен подход к построению портфеля Шарпа, основанный на предложении рассматривать цены одного и того же актива на разных таймфреймах как цены разных активов (Косарева, 2019). Показано, что возможно подобрать комбинацию пары таких «активов», при которой риск оказывается ниже при сохранении доходности портфеля на уровне средней для активов с одинаковым таймфреймом. Ю. А. Коноплевой в работе (Коноплева, 2015) для отбора акций в портфель «Квази-Шарпа» в качестве индикатора применена распространенная фрактальная характеристика временных рядов — показатель Херста H , для оценки которого использован метод R/S -анализа. Выбраны активы, величина H ценовых рядов которых стремится к 0,5 и превышает это значение, что свидетельствует о трендовости и предсказуемости поведения котировок. Схожим методом отбора активов в портфель пользовались Е. М. Бронштейн и З. И. Янчушка (Бронштейн, Янчушка, 2007), формируя всевозможные комбинации из 10 акций и оценивая методом клеточного покрытия фрактальную размерность D рядов доходностей полученных портфелей, из которых выбирался портфель с наименьшим значением D как обладающий наиболее стабильным поведением. Также в работах (Бронштейн, Янчушка, 2007; Коноплева, 2015) показано, что распределение случайных величин курсов исследуемых акций не является гауссовым, соответствующие временные ряды обладают длинной памятью, следовательно, к ним применима гипотеза фрактального рынка. С этими выводами согласованы и результаты исследования, опубликованные в статье (Симонов, Гарафутдинов, 2019). Также нами в работе (Garafutdinov, Gurova, 2019) опробован подход к формированию оптимальных портфелей из двух активов не по историческим доходностям акций, а по прогнозным, полученным с помощью фрактальных статистических моделей ARFIMA; показано, что характеристики таких портфелей могут быть лучше, нежели при использовании исторических доходностей. В качестве признака для отбора активов в портфель был использован парный коэффициент корреляции их доходностей.

По нашему мнению, метод формирования портфелей на базе прогнозных доходностей активов является перспективным и может стать одним из приложений подхода к прогнозированию финансовых рынков на основе фрактального анализа. В работе (Гарафутдинов, Гурова, 2020) описана методика, расширяющая применение

статистических моделей для поиска оптимального портфеля, согласно которой портфель подвергается периодической реструктуризации по мере поступления новой информации о значениях цен активов. В то же время методология использования фрактального подхода для формирования инвестиционных портфелей должна включать в себя и метод отбора наиболее подходящих активов в портфель. В этой связи интерес вызывает подход, описанный в работах (Бронштейн, Янчушка, 2007; Коноплева, 2015), согласно которому в портфель включаются активы, обладающие наиболее стабильной и предсказуемой динамикой среди прочих, а индикатором стабильности являются фрактальные показатели. Идея использовать фрактальный анализ для выявления трендоустойчивых и предсказуемых активов лежит на поверхности, но ей не уделяется должного внимания. Нами решено опробовать данный подход и убедиться в его жизнеспособности.

Использованные методы

Прежде чем переходить к методике исследования, кратко опишем модель инвестиционного портфеля Г. Марковица. Характеристику этой модели можно найти, например, в работе (Семененко, 2015). Основными числовыми характеристиками доходности актива являются его математическое ожидание и дисперсия. Математическое ожидание характеризует ожидаемую доходность актива и вычис-

ляется по формуле $\mu_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$, где r_t — доходность актива в момент времени

t , T — общее количество рассматриваемых периодов. Для удобства обозначим ожидаемую доходность актива $r = \mu_r$. Дисперсия характеризует риск, связанный с приобретением данного актива, и является математическим отражением понятия волатильности (изменчивости) доходности актива. На выборках небольшого размера (десятки наблюдений) имеет смысл использовать несмещенную выборочную

дисперсию: $Var_r = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu_r)^2$.

На практике в качестве меры риска обычно используют стандартное отклонение доходности $\sigma_r = \sqrt{Var_r}$. Обозначим его как $\sigma = \sigma_r$. Сама величина доходности актива

может оцениваться разными способами в зависимости от предпочтений инвестора: например, это может быть дивидендная доходность в случае акций и купонная ставка в случае облигаций. Часто используют доходность от курсовых разниц (так

называемую нетто-доходность), которая вычисляется по формуле $r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$,

где P_t — цена актива в момент времени t , P_{t-1} — цена актива в предыдущий момент времени. Пусть портфель включает n активов; долю i -го актива обозначим как

w_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда ожидаемая доходность портфеля составит $r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i$, где r_i —

ожидаемая доходность i -го актива в портфеле. Риск портфеля можно вычислить

как $\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j}$, где $R_{i,j}$ — парный коэффициент корреляции

Пирсона между доходностями i -го и j -го активов.

Постановку задачи оптимизации портфеля можно записать следующим образом. Переменными являются доли активов в портфеле $w_i, i = \overline{1, n}$. Целевой функционал: $r_p \rightarrow \max$ в случае максимизации доходности, $\sigma_p \rightarrow \min$ в случае

минимизации риска. Накладываемые ограничения: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $r_p \geq r_{min}$ (в случае ввода в модель условия минимального уровня ожидаемой доходности r_{min}), $\sigma_p \leq \sigma_{max}$ (в случае ввода в модель условия максимального уровня риска σ_{max}). Дополнительное ограничение: $w_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

В рамках нашего исследования отбор активов в портфель осуществляется по критерию стабильности их динамики, которым является какая-либо мера фрактальности. К фрактальным показателям временных рядов относятся следующие: показатель Херста H , фрактальная размерность графика ряда D , индекс фрактальности μ . В работе (Кривоносова, Первадчук, Кривоносова, 2014) показано, что эти величины линейно соотносятся между собой. Поэтому видится разумным принять универсальным фрактальным показателем временного ряда величину фрактальной размерности D , вычисляемую теми или иными методами, к которым относятся: метод клеточного покрытия, метод минимального покрытия, R/S-анализ, метод детрендрованного флуктуационного анализа, метод вейвлет-преобразований и др. (Гарафутдинов, 2018). Выбор наиболее подходящего метода для оценки фрактальной размерности может явиться предметом отдельного исследования. В нашем случае было решено использовать три из них: метод клеточного покрытия, метод минимального покрытия и детрендрованный флуктуационный анализ (ДФА). Широко распространенный метод R/S-анализа мы решили не применять, потому что для оценки им фрактального показателя с приемлемой точностью необходимо брать не менее нескольких тысяч наблюдений: так, Е. Федер рекомендует объем выборки 2500 (Feder, 1988), А. В. Зиненко говорит о 5000 (Зиненко, 2012). В нашем же исследовании объемы выборки могут быть ограничены десятками значений. Коротко опишем выбранные методы.

Алгоритм метода клеточного покрытия описан в (Кривоносова, Первадчук, Кривоносова, 2014) и состоит в следующем. Плоскость, содержащая анализируемое изображение объекта (графика временного ряда), покрывается сеткой, которая делит ее на квадратные клетки стороной δ . Подсчитывается количество клеток $N(\delta)$, содержащих в себе хотя бы одну точку изображения. Затем поступательно уменьшается δ и подсчитываются соответствующие значения $N(\delta)$. Величина фрактальной размерности D вычисляется как взятый с противоположным знаком коэффициент при независимой переменной уравнения линейной регрессии $\ln N(\delta) = D \ln \delta + b$, где b — свободный член.

Метод минимального покрытия предложен Н. В. Старченко и описан, например, в статье (Дубовиков, Старченко, 2011). Пусть имеется временной ряд $y(t)$. Пусть процесс характеризуется некоторой функцией $y = f(t)$ на отрезке $[a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b]$, $i = \overline{1, m}$. Отрезок $[a, b]$ разбивается на m сегментов равной

длины $\delta = \frac{b-a}{m} = t_i - t_{i-1}$. Затем график функции покрывается прямоугольниками

с основанием δ таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади. Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, равной разности максимального и минимального значения $f(t)$ на данном

отрезке. Накопленная амплитуда на всем отрезке вычисляется как $V_f(\delta) = \sum_{i=1}^m A_i(\delta)$.

Затем поступательно уменьшается δ и подсчитываются соответствующие значения $V_f(\delta)$. Показатель μ , названный автором индексом фрактальности, вычисляются аналогично клеточной размерности D как взятый с отрицательным знаком коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии

$\ln V_f(\delta) = \mu \ln \delta + b$, где b — свободный член. Стоит заметить, что вектор значений δ может определяться разными способами. Старченко брал степени двойки, т. е. $\delta = 2^k$, $k = 0, M$, где 2^M — величина, не превышающая длину ряда $(b - a)$. Он исследовал ряды, длины которых соответствовали степеням двойки; очевидно, что если длина ряда степенью двойки не является, часть ряда отбрасывается. В. Н. Аптуков, В. Ю. Митин в работе (Аптуков, Митин, 2019) поступили иначе, в их случае $\delta = 2, 10$. Если $(b - a) > \delta m$, часть ряда также отбрасывается.

Метод ДФА описан, например, в работе (Кириченко, Чалая, 2014). Пусть имеется временной ряд $x(t)$. Строится кумулятивный ряд $y(t)$, каждый член которого вычисляется по формуле

$$y_i = \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x}),$$

где \bar{x} — среднее значение $x(t)$. Далее ряд $y(t)$ разбивается на N сегментов длиной δ . Для каждого сегмента вычисляется флуктуационная функция

$$F(\delta) = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=1}^{\delta} (y(t) - Y_m(t))^2},$$

где $Y_m(t)$ — локальный m -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента (т. е. значение функции тренда в точке t). Затем N полученных функций $F(\delta)$ усредняются. Значения $\overline{F(\delta)}$ вычисляются для различных значений δ . Показатель Херста H определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\overline{\ln F(\delta)} = H \ln \delta + b$, где b — свободный член.

Можно заметить, что все три метода позволяют вычислить разные фрактальные показатели. Однако, как показано в (Кривоносова, Первадчук, Кривоносова, 2014), величина фрактальной размерности D может быть выражена через H по формуле $D = 2 - H$, а через μ по формуле $D = \mu + 1$.

Как уже было отмечено, размерность D временного ряда может выступать мерой его стабильности, предсказуемости. В зависимости от характера развития случайного процесса временные ряды могут находиться в одном из трех состояний, каждому из которых соответствует определенный диапазон значений $D \in [1; 2]$: 1) тренд, $D \in [1; 1,5)$; 2) случайное блуждание, $D = 1,5$; 3) флэт, $D \in (1,5; 2]$ (Симонов, Гарафутдинов, 2019). При $D \rightarrow 1$ ряд является трендоустойчивым (персистентным): если в текущем периоде показатель увеличивался, с большой долей вероятности он продолжит расти в следующем периоде, и наоборот. Исходя из этого, портфельного инвестора интересуют активы, ценовые ряды которых обладают величиной D , максимально близкой к единице. Отметим, что, по нашему мнению, следует рассматривать именно цены финансовых инструментов, их котировки, а не доходности, потому что ряд доходностей, как правило, стационарен и обладает свойствами флэта, показатель постоянно возвращается к среднему. В то же время долговременная положительная динамика цены, которая и интересует инвестора, хорошо отражена на графике котировок.

Таким образом, задача отбора активов в портфель сводится к тому, чтобы оценить фрактальную размерность ценового ряда каждого из них на некотором временном промежутке, отсортировать активы по возрастанию D и выбрать из полученного списка первые n элементов, где n — количество активов в портфеле. Здесь возникает два нюанса. Во-первых, величина D не характеризует направление тренда в случае его наличия: он может быть как повышательным, так и понижательным, в то время как инвестора интересуют активы с долговременной положительной доходностью. Поэтому из списка инструментов нужно отобрать лишь те, которые соответствуют

этому критерию. Во-вторых, оценки размерности, полученные разными методами, могут существенно различаться, в результате чего в портфель могут попасть разные активы. Поэтому было решено применить три разных метода вычисления размерности и сравнить результаты, полученные при использовании каждого из них.

Данные и методика исследования

В качестве исходных данных было решено взять акции компаний, являющиеся базой расчета индекса МосБиржи¹, исходная выборка составила 38 инструментов. Данные об их месячных (на первое число месяца) ценах за период с 1 января 2000 г. по 1 января 2020 г. были экспортированы с сайта ФИНАМ. Каждый из рядов цен был очищен от пропусков по следующей методике: сначала были найдены участки, состоящие из не менее чем двух пропусков, и последний такой участок ряда, а также все предшествующие ему значения были отброшены; единичные пропуски в оставшемся фрагменте ряда были заполнены методом среднего двух соседних значений. Обозначим очищенный от пропусков ряд цен актива $P = [p_t, p_{t+1}, \dots]$, $t = \overline{1, T}$, где T — общее количество элементов ряда. Чтобы оценить качество портфеля, сформированного из активов с помощью фрактального подхода, и сравнить его с другими портфелями, следует разделить данные на обучающую выборку (фрагмент ряда, по которому будет оцениваться фрактальная размерность) и тестовую выборку (фрагмент ряда, который будет использован для расчета характеристик результирующего портфеля). Пусть P_{train} — обучающая выборка, содержащая значения ряда P на даты до 1 января 2019 г. включительно, а P_{test} — тестовая выборка, содержащая 12 значений ряда P на даты с 1 февраля 2019 г. по 1 января 2020 г. включительно. Далее были вычислены месячные нетто-доходности актива, в результате чего были получены ряды Y_{train}, Y_{test} .

Здесь следует отметить, что финансовые временные ряды могут быть неоднородны, что может стать проблемой при их анализе и привести к некорректности полученных результатов. В частности, акции могут быть подвержены таким операциям, как дробление и объединение, в рядах доходностей эти события отражаются аномально высокими или низкими значениями, т. е. выбросами. Причем важно отличать естественные выбросы, скачки цен, возможные в период кризисных ситуаций, когда котировки ценной бумаги в течение месяца могут резко упасть, от выбросов технических, связанных с изменением конфигурации эмиссии. Чтобы отследить последние, можно изучить историю выпуска акций эмитента на предмет их дробления или объединения, в случае обнаружения которого произвести корректировку ряда цен для обеспечения его однородности. Нами ввиду большого количества рассматриваемых ценных бумаг и высокой трудоемкости этой задачи решено поступить иначе: отсеять те акции, цены которых в течение месяца увеличивались или уменьшались в 5 или более раз, не изучая причины таких скачков. Были проанализированы все значения ряда Y_{train} для каждого из активов, в результате были отброшены инструменты со следующими кодами: AFKS, IRAO, LSRG, PHOR, SBER, SBERP. Кроме того, также из анализа были исключены акции DSKY, FIVE, TCSG, так как история их котировок на начало 2019 г. составляет менее трех лет (в рядах месячных цен P_{train} слишком мало значений для оценки размерности), и NYDR, VTBR по причине их неположительной среднемесячной доходности.

Для оставшихся активов были оценены фрактальные размерности их ценовых рядов P_{train} тремя упомянутыми выше методами. Оценка осуществлялась по всем

¹ URL: <https://www.moex.com/ru/index/IMOEX/constituents> (дата обращения: 17.05.2020).

имеющимся данным (после очистки). С нашей точки зрения, использование всей доступной истории котировок выглядит логичным несмотря на то, что длины истории каждого актива различаются. Известно, что финансовые временные ряды обладают переменной фрактальной структурой и спектром локальных фрактальных размерностей (Дубовиков, Старченко, 2011; Сизов, 2014; Загайнов, 2017). В работе (Гарафутдинов, 2020) предпринята попытка разработать методику определения границ участков ряда с различными размерностями. На текущей стадии исследований фрактального подхода к анализу экономических процессов вопрос об определении таких участков остается открытым. Следовательно, сложно определить, где начинается фрагмент анализируемого ряда P_{train} , обладающий теми же фрактальными свойствами, что и продолжающий его ряд P_{test} . Поэтому будем исходить из предположения, что поведение процесса на тестовом участке его ценового ряда соответствует его поведению на всей длине предыдущего участка.

Вычислительный эксперимент осуществлялся с помощью языков программирования Python 3.7.5 и R 4.0.0, на которых были написаны соответствующие процедуры. Программной реализацией метода клеточного покрытия выступила функция *fd.estim.boxcount()* из библиотеки *fractalDIM* в R с параметрами по умолчанию, за исключением выбора обычной (не вариационной) модификации метода (Pilgrim, Taylor, 2018). Для метода минимального покрытия была написана пользовательская функция на Python, при этом были реализованы оба способа формирования вектора δ : назовем их подходом Старченко и подходом Аптукова, Митина. Для метода ДФА была использована функция *dfa()* из библиотеки *nolds* на Python с параметрами по умолчанию (в качестве модели тренда взят полином первого порядка). Согласно документации к функции *dfa()*¹, ее возвращаемым значением является оценка показателя Херста (обозначенная α), для нестационарных рядов увеличенная на единицу. Ввиду того, что финансовые ряды нестационарны, для каждого ряда функция вернула значение >1 , поэтому величина размерности была вычислена как $D = 2 - (\alpha - 1)$.

Полученные оценки размерности приведены в табл. 1.

Таблица 1

Оценки размерностей ценовых рядов активов, полученные различными методами

Код акции	Эмпирически оцененная величина размерности D_E			
	Метод клеточного покрытия (1)	Метод минимального покрытия, подход Старченко (2)	Метод минимального покрытия, подход Аптукова, Митина (3)	Метод ДФА (4)
AFLT	1,26303	1,24834	1,51786	1,31167
ALRS	1,26303	1,23640	1,40099	1,26402
CBOM	1,39232	1,05309	1,21431	1,53519
CHMF	1,22239	1,26685	1,54900	1,37177
FEES	1,54057	1,22468	1,47257	1,54530
GAZP	1,64386	1,28068	1,45063	1,54721
GMKN	1,29546	1,27668	1,46941	1,38026
LKOH	1,35364	1,18106	1,43272	1,51388
MAGN	1,40210	1,26878	1,59039	1,32600
MGNT	1,16993	1,19637	1,34781	1,42928

¹ URL: <https://cschoel.github.io/nolds/nolds.html> (дата обращения: 17.05.2020).

Окончание табл. 1

Код акции	Эмпирически оцененная величина размерности D_E			
	Метод клеточного покрытия (1)	Метод минимального покрытия, подход Старченко (2)	Метод минимального покрытия, подход Аптукова, Митина (3)	Метод ДФА (4)
MOEX	1,22239	1,24980	1,32382	1,40414
MTSS	1,54432	1,35919	1,57874	1,46050
NLMK	1,30256	1,30140	1,56103	1,35061
NVTK	1,51457	1,16776	1,38034	1,40954
PIKK	1,32193	1,11709	1,20626	1,19319
PLZL	1,28951	1,16570	1,51092	1,40399
POLY	1,45943	1,21537	1,31028	1,46769
ROSN	1,29546	1,27298	1,56591	1,60037
RTKM	1,26303	1,29709	1,41476	1,44030
RUAL	1,32193	1,25488	1,53008	1,50728
SNGS	1,47393	1,37325	1,45840	1,60397
SNGSP	1,64386	1,27742	1,44362	1,40352
TATN	1,18442	1,11793	1,46501	1,49973
TATNP	1,24101	1,10200	1,49178	1,43486
TRNFP	1,22239	1,24433	1,40489	1,52186
UPRO	1,49476	1,35318	1,50683	1,43735
YNDX	1,63743	1,14743	1,34065	1,55387

Источник: составлено авторами.

Можно заметить, что оценки фрактальных размерностей D_E , полученные разными методами, отличаются. В табл. 2 представлены величины парных коэффициентов корреляции между рядами значений D_E . Номера методов соответствуют числам в скобках, указанным в названии методов в табл. 1.

Таблица 2

Корреляционная матрица значений оценок размерности, вычисленных разными алгоритмами

	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4
Метод 1	–	0,22	–0,02	0,32*
Метод 2		–	0,57***	0,07
Метод 3			–	0,07
Метод 4				–

Источник: составлено авторами.

Примечание. В таблице использованы следующие обозначения: «***» — коэффициент корреляции является статистически значимым на уровне значимости 1%; «*» — коэффициент корреляции значим на уровне 10%; отсутствие звездочек говорит об отсутствии статистически значимой (на уровне не более 10%) взаимосвязи.

Следует отметить, что оценки размерностей, полученными разными методами, почти не коррелируют друг с другом. Достаточно сильная значимая положительная взаимосвязь обнаружена только между рядами, вычисленными разными модификациями метода минимального покрытия. Более слабую и менее значимую связь

показали методы клеточного покрытия и ДФА. Эти результаты подтверждают тезис о том, что разные методы оценки фрактальных показателей генерируют разные результаты, и необходимо провести масштабный анализ и сравнение различных методов, определить условия их применимости.

При формировании инвестиционных портфелей в их состав было включено по 4 актива. Оптимизация осуществлялась по двум критериям: 1) максимальная доходность; 2) минимальный риск. Ограничений на величины доходности и риска введено не было, в результате чего при максимизации доходности алгоритм зачастую включал в состав портфеля только один актив, обладающий наибольшей доходностью. Поэтому мы наложили ограничения на структуру портфеля: доля каждого актива должна составлять не менее 10%. Гипотезу исследования было решено проверять путем сравнения характеристик портфелей двух классов: сформированных из активов с наименьшей размерностью, т. е. обладающих наиболее стабильной динамикой цен, и сформированных из активов с наибольшей размерностью, т. е. менее предсказуемых. В соответствии с данной гипотезой, портфели первого класса должны обладать лучшими характеристиками, чем портфели второго. Все эти портфели формируются из активов, отобранных по размерностям, вычисленным различными методами.

Также для сравнения было решено сформировать портфели из активов, отобранных по более традиционному, чем величина фрактальной размерности, критерию: величине взаимной парной корреляции. Для этого были вычислены коэффициенты корреляции рядов Y_{train} всех возможных пар активов из рассматриваемых (т. к. длина ряда актива 1 могла не совпадать с длиной ряда актива 2, для вычисления корреляции более длинный ряд обрезался) и найдена такая четверка активов, абсолютные значения взаимных корреляций которых в сумме минимальны. Этими активами оказались обыкновенные акции следующих компаний: 1) ALRS (алмазодобывающая компания ПАО «АЛРОСА»); 2) FEES (энергетическая компания ПАО «ФСК ЕЭС»); 3) MTSS (телекоммуникационная компания ПАО «Мобильные ТелеСистемы»); 4) SNGS (нефтяная компания ПАО «Сургутнефтегаз»). Портфель из этих акций получился диверсифицированным не только по формальному критерию — коэффициенту корреляции, но и по смысловому наполнению: указанные компании относятся к разным отраслям экономики. На рис. 1 представлены графики цен отобранных активов.

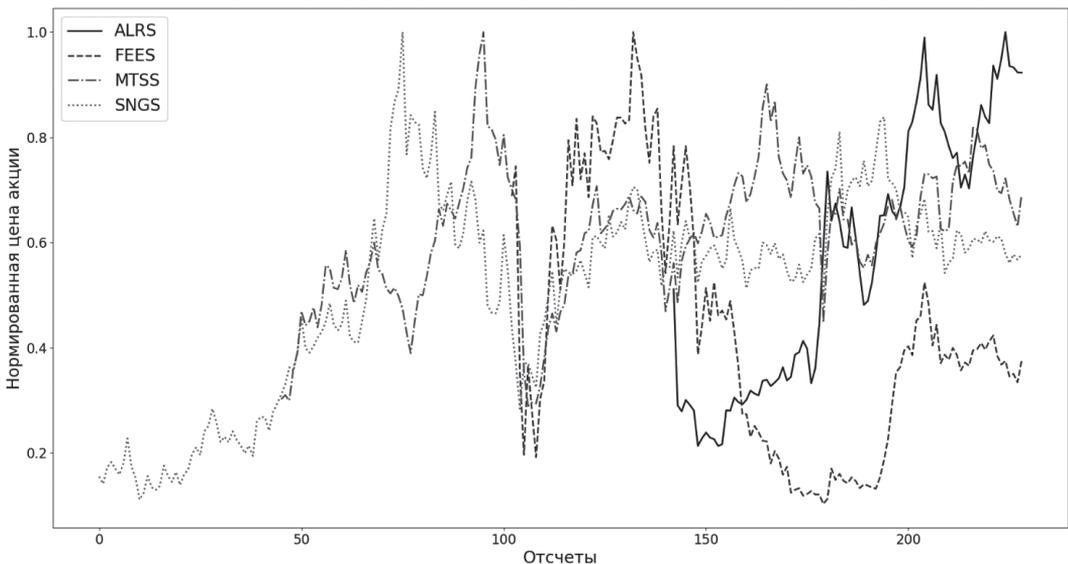


Рис. 1. Графики котировок акций, вошедших в диверсифицированный портфель. Количество отсчетов — 229, что соответствует периоду с января 2000 г. по январь 2019 г.

Из рис. 1 видно, что цены всех акций, за исключением FEES, имеют тенденцию к росту. Учитывая низкую взаимосвязь между ними, можно предположить, что портфель из таких активов будет обладать неплохими характеристиками. В то же время графики сильно изрезаны, что свидетельствует о высоких величинах их фрактальных размерностей. Следует отметить, что визуально точную величину размерности графика, как и, например, факт стационарности процесса, установить сложно, для этого используются рассчитанные аналитически показатели. В соответствии с оценками их размерностей разными методами, анализируемые ряды не обладают ярко выраженной антиперсистентностью, а следовательно, динамика процессов должна быть стабильной.

Результаты и обсуждение

В табл. 3 приведены результаты формирования оптимальных портфелей из различных активов, отобранных по величине оценки размерности.

Таблица 3

Характеристики портфелей, сформированными разными способами

	Максимизация доходности	Минимизация риска
1. Метод клеточного покрытия		
Активы с наименьшей размерностью: MGNT, TATN, MOEX, CHMF	Доли = [10%, 70%, 10%, 10%] Доходность = -0,00282 Риск = 0,03156	Доли = [23%, 41%, 26%, 10%] Доходность = -0,00034 Риск = 0,02727
Активы с наибольшей размерностью: MTSS, YNDX, GAZP, SNGSP	Доли = [10%, 70%, 10%, 10%] Доходность = 0,02252 Риск = 0,05818	Доли = [10%, 10%, 57%, 23%] Доходность = 0,02248 Риск = 0,06869
2. Метод ДФА		
Активы с наименьшей размерностью: PIKK, ALRS, AFLT, MAGN	Доли = [70%, 10%, 10%, 10%] Доходность = 0,01265 Риск = 0,04582	Доли = [45%, 23%, 19%, 13%] Доходность = 0,00582 Риск = 0,0347
Активы с наибольшей размерностью: GAZP, YNDX, ROSN, SNGS	Доли = [10%, 70%, 10%, 10%] Доходность = 0,02728 Риск = 0,05618	Доли = [54%, 10%, 10%, 26%] Доходность = 0,03478 Риск = 0,06891
3. Метод минимального покрытия (подход Старченко)		
Активы с наименьшей размерностью: СВОМ, TATNP, PIKK, TATN	Доли = [10%, 70%, 10%, 10%] Доходность = 0,01711 Риск = 0,04711	Доли = [67%, 10%, 13%, 10%] Доходность = 0,00861 Риск = 0,02051
Активы с наибольшей размерностью: NLMK, UPRO, MTSS, SNGS	Доли = [70%, 10%, 10%, 10%] Доходность = 0,00334 Риск = 0,04273	Доли = [10%, 10%, 41%, 39%] Доходность = 0,02753 Риск = 0,05146
4. Метод минимального покрытия (подход Аптукова, Митина)		
Активы с наименьшей размерностью: PIKK, СВОМ, POLY, MOEX	Доли = [70%, 10%, 10%, 10%] Доходность = 0,01953 Риск = 0,03999	Доли = [11%, 66%, 13%, 10%] Доходность = 0,01254 Риск = 0,02015
Активы с наибольшей размерностью: NLMK, ROSN, MTSS, MAGN	Доли = [39%, 10%, 10%, 41%] Доходность = 0,0028 Риск = 0,04379	Доли = [10%, 35%, 45%, 10%] Доходность = 0,01359 Риск = 0,02711
5. Выбор активов по наименьшей сумме абсолютных парных корреляций		
Активы: ALRS, FEES, MTSS, SNGS	Доли = [70%, 10%, 10%, 10%] Доходность = -0,00168 Риск = 0,04474	Доли = [25%, 10%, 33%, 32%] Доходность = 0,02082 Риск = 0,05288

Источник: составлено авторами.

Предположение о том, что использование разных методов оценки размерности приведет к отбору различных активов в портфели, подтвердилось. Имеет смысл сравнить полученные портфели, чтобы судить о состоятельности гипотезы исследования. Согласно ей, портфель из активов с наименьшей размерностью («лучший») обладает большей доходностью и меньшим риском, чем портфель из активов с наибольшей размерностью («худший»), при прочих равных (одинаковых методах оценки размерности).

При максимизации доходности средняя месячная доходность «лучшего» портфеля превысила таковую «худшего» портфеля лишь в двух случаях из четырех — для обеих модификаций метода минимального покрытия. Месячный риск «лучшего» портфеля оказался ниже в трех случаях из четырех — во всех, кроме метода минимального покрытия (подход Старченко). При минимизации риска доходность «лучшего» портфеля не приняла более высокое значение ни в одном из случаев. При этом риск «лучшего» портфеля оказался ниже в каждом случае, причем в трех случаях из четырех — в два и более раз.

Сравним показатели «фрактальных» портфелей с характеристиками диверсифицированных портфелей. При максимизации доходности средняя месячная доходность диверсифицированного портфеля явилась отрицательной и превысила таковую лишь «лучшего» портфеля, сформированного с применением клеточного метода, риск оказался выше риска «лучших» портфелей в 50% случаев, выше риска «худших» — также в 50% случаев. При минимизации риска доходность диверсифицированного портфеля превысила доходность всех «лучших» портфелей и только одного из «худших», риск оказался выше риска всех «лучших» и двух из четырех «худших».

Можно сказать, что «лучшие» портфели не продемонстрировали уверенного увеличения доходности в сравнении с «худшими» в каждом случае, чего нельзя сказать о риске — стандартное отклонение «лучших портфелей» оказалось существенно ниже в большинстве случаев, как при максимизации доходности, так и при минимизации риска. Это позволяет сделать вывод о том, что величина фрактальной размерности способна выполнять свои функции предиктора стабильности динамики активов и формировать низкорисковые портфели. Диверсифицированные портфели, содержащие активы, ценовая динамика которых визуально казалась обладающей восходящим трендом, т. е. такие, какие мог бы интуитивно сформировать инвестор, продемонстрировали практически нулевую доходность при ее максимизации, что хуже почти всех «фрактальных» портфелей, и риск выше, чем риск «лучших» портфелей, при его минимизации. Это свидетельствует о том, что величина взаимной скоррелированности в совокупности с диверсификацией активов по отраслям экономики являются худшим критерием отбора активов в портфель, чем фрактальная размерность.

Наиболее согласованные с гипотезой результаты получены с применением метода минимального покрытия (подход Аптукова, Митина). Рассмотрим ценовые графики «лучших» и «худших» активов, отобранных с помощью этого метода, которые представлены на рис. 2.

Наиболее сглаженными графиками обладают активы РИКК и СВМ, о невысокой величине их размерности можно судить посредством визуального анализа. О размерности двух других «лучших» активов столь однозначных выводов сделать нельзя, их сложно отличить от графиков «худших». При этом можно заметить, что графики неоднородны на всей своей длине, более изрезанные участки сменяются более сглаженными. Этот факт подтверждает переменную фрактальную структуру финансовых рядов и наличие у них множественных

локальных размерностей. В целом визуальный анализ графиков позволяет сделать вывод, что метод минимального покрытия (подход Аптукова, Митина) достаточно корректно оценивает величину фрактальной размерности финансовых рядов.

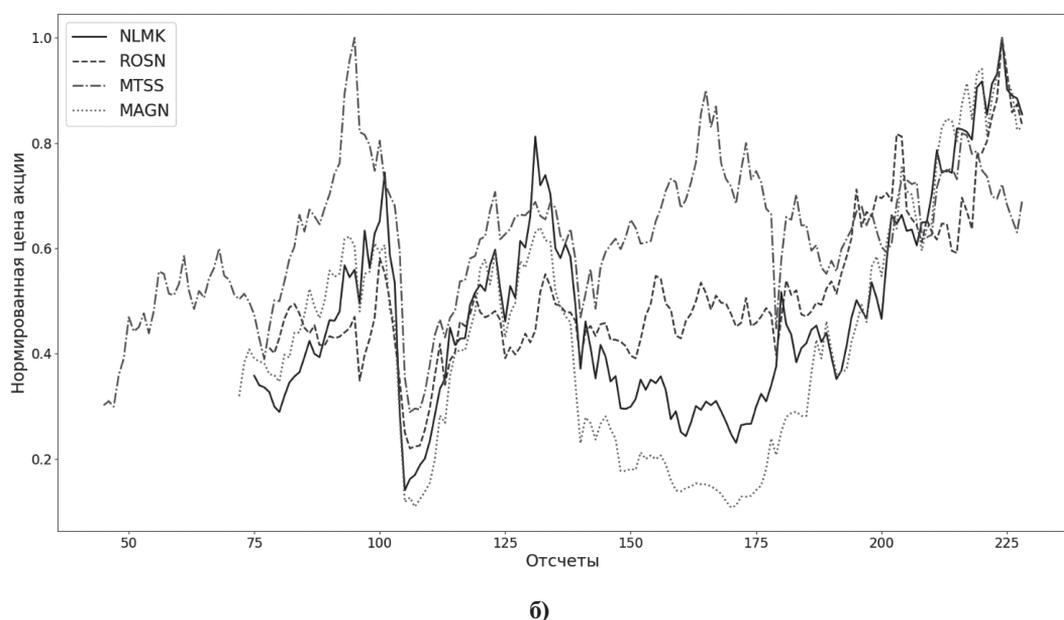
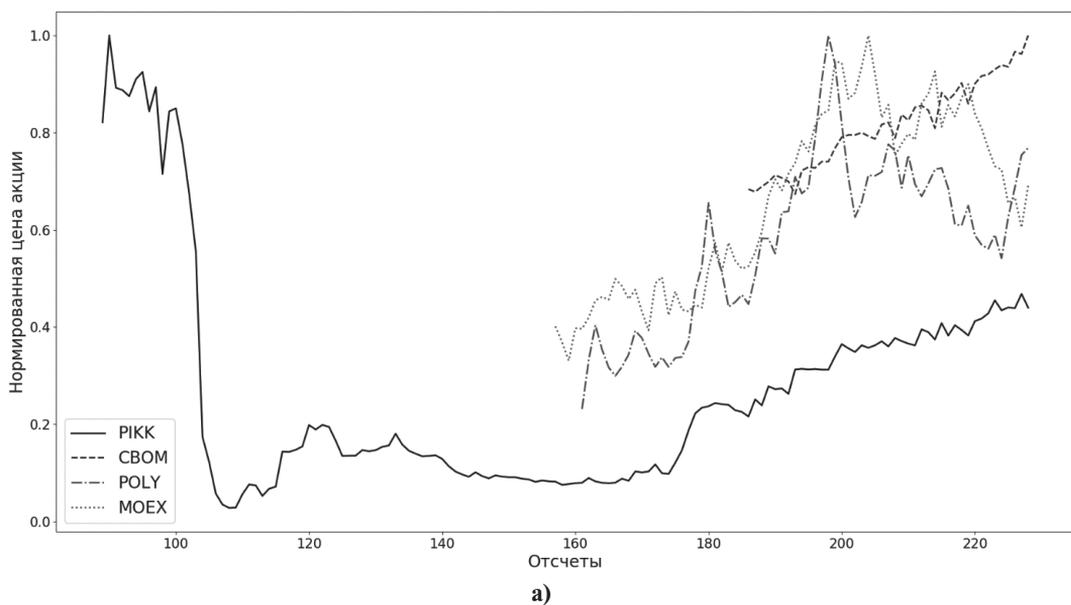


Рис. 2. Графики котировок акций с размерностями, оцененными методом минимального покрытия (подход Аптукова, Митина): а) наименьшими; б) наибольшими

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы. Основная гипотеза, согласно которой портфель, сформированный из активов, чьи ценовые ряды характеризуются фрактальной размерностью малой величины, обладает лучшими характеристиками, чем противоположный ему портфель из активов с большой размерностью, не отвергается. Размерность рядов котировок

активов может служить более надежным критерием их отбора в портфель, чем величина взаимной скоррелированности и диверсифицированность по отраслям экономики. В то же время в большей степени это относится к риску, а не к доходности портфеля, т. е. фрактальная размерность активов может служить, в первую очередь, предиктором стабильности их динамики, низкой волатильности, а не сохранения тенденции. Действительно, сама по себе фрактальная размерность ряда не может служить точным индикатором будущего поведения ряда. Однако персистентные ряды, характеризующиеся низкой размерностью, гипотетически могут быть эффективно спрогнозированы с использованием статистических моделей, что возвращает нас к идее, изложенной в работе (Garafutdinov, Gurova, 2019). Объединение методик решения задачи отбора активов в портфель на основе размерности и задачи поиска оптимальной структуры портфеля на базе прогнозных доходностей могут сформировать новый подход к формированию инвестиционных портфелей с применением фрактального анализа. Этот момент требует дальнейших исследований.

Различные методы оценки фрактальных характеристик (размерности, показателя Херста) финансовых рядов позволяют получать далеко не всегда согласованные между собой результаты. Это обостряет проблему выбора метода фрактального анализа, подходящего для тех или иных данных и целей исследования. Результаты, полученные авторами в работах (Бронштейн, Янчушка, 2007; Коноплева, 2015), могли быть иными, если бы ими были использованы другие методы оценки фрактальных параметров. В то же время процедуры выбора метода авторами проведено не было.

Ценовые ряды финансовых инструментов обладают переменной фрактальной структурой и спектром локальных фрактальных размерностей. Это свидетельствует о необходимости разработки метода выявления границ участков рядов постоянной структуры, что позволило бы определять для каждого актива, на каком участке мы находимся в текущий момент времени, какова его размерность и каков инвестиционный горизонт оптимального портфеля, который можно сформировать на базе активов с этими размерностями, т. е. в течение какого промежутка времени их динамика будет оставаться стабильной и портфель будет приносить доход, не требуя реструктуризации.

Заключение

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что гипотеза об использовании величины фрактальной размерности ценовых рядов активов как предиктора их стабильности и критерия, по которому активы могут быть отобраны в инвестиционный портфель, является жизнеспособной. Сформированные из активов с наименьшей размерностью портфели показали меньшую величину риска, чем портфели из активов с наибольшей размерностью и портфели, диверсифицированные по отраслям экономики. Дальнейшими направлениями исследований могут являться следующие: 1) исследование эффективности применения статистических моделей для прогнозирования ценовой динамики активов с низкой величиной фрактальной размерности для формирования портфелей; 2) сравнение различных методов оценки фрактальных характеристик финансовых рядов, выявление их ограничений и условий применимости; 3) разработка метода определения границ участков рядов различной фрактальной размерности и его апробация в решении задачи формирования портфелей.

Источники

Антуков В. Н., Митин В. Ю. Фрактальный анализ метеорологических рядов с помощью метода минимального покрытия // Географический вестник = Geographical bulletin. 2019. № 2(49). С. 67–79.

Бронштейн Е. М., Янчушка З. И. Фрактальный подход к формированию портфелей ценных бумаг // Финансы и кредит. 2007. № 12(252). С. 26–29.

Гарафутдинов Р. В. К задаче классификации участков финансовых временных рядов различной фрактальной размерности // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики: Сборник научных трудов по материалам XVII Международной научно-практической конференции 24–25 апреля 2020 г. Тольятти, 2020. С. 226–230.

Гарафутдинов Р. В. Обзор методов оценивания фрактальных характеристик финансовых временных рядов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: Сборник научных трудов по материалам XIII Международной научно-технической конференции 4–6 декабря 2018 г. Пенза, 2018. С. 97–103.

Гарафутдинов Р. В., Гурова Е. П. Методика формирования инвестиционного портфеля Марковица на базе прогнозных доходностей с ребалансировкой // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики: Сборник научных трудов по материалам XVII Международной научно-практической конференции 24–25 апреля 2020 г. Тольятти, 2020. С. 230–233.

Демин А. В., Витяев Е. Е. Финансовые временные ряды: прогнозирование и распознавание нарушений динамики // ЗНАНИЯ — ОНТОЛОГИИ — ТЕОРИИ (ЗОНТ–09): Сборник научных трудов по материалам Всероссийской конференции с международным участием 22–24 октября 2009 г. Новосибирск, 2009. С. 79–86.

Дмитриев Н. Д., Тихонова М. В. Формирование инвестиционного портфеля // Стратегии бизнеса. 2019. № 5(61). С. 17–20.

Дубовиков М. М., Старченко Н. В. Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // Успехи физических наук. 2011. № 7. С. 779–786.

Загайнов А. И. Исследование изменения фрактальности хаотических процессов на рынках капитала // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2017. № 4. С. 39–43.

Зиненко А. В. R/S анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. 2012. № 3(21). С. 24–30.

Кириченко Л. О., Чалая Л. Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов // International Journal «Information Technologies & Knowledge». 2014. № 1. С. 22–28.

Коноплева Ю. А. Методика моделирования инвестиционного портфеля с учетом особенностей регионального рынка ценных бумаг // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2015. № 6(40). URL: <http://uecs.ru/uecs-78-782015/item/3605-2015-06-25-08-41-16> (дата обращения: 17.05.2020).

Косарева Е. А. Построение портфеля Шарпа для пары активов в условиях гипотезы фрактального рынка // Современная экономика: проблемы и решения. 2019. № 6(114). С. 44–54. DOI: 10.17308/meps.2019.6/2134.

Кривоносова Е. К., Первадчук В. П., Кривоносова Е. А. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. URL: <https://www.science-education.ru/pdf/2014/6/701.pdf> (дата обращения: 17.05.2020).

Мансуров А. К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа // Проблемы прогнозирования. 2008. № 1. С. 145–158.

Семенов М. Г. Модель Марковица: математические аспекты и компьютерная реализация // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. № 11. С. 306–309.

Сизов А. А. Временные ряды с переменной структурой // Естественные и технические науки. 2014. № 2. С. 233–234.

Симонов П. М., Гарафутдинов Р. В. Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2019. Том 14. № 2. С. 268–288.

Feder J. Fractals. Plenum Press, 1988.

Garafutdinov R., Gurova E. The formation of investment portfolios based on forecasted income with the use of fractal models // Mathematical Modeling. 2019. N 3. P. 86–88.

Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. N 7. P. 77–91.

Pilgrim I., Taylor R. Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. Fractal Analysis // InTech. 2018. Chapter 2.

References

- Aptukov V. N., Mitin V. Yu. Fraktal'nyi analiz meteorologicheskikh ryadov s pomoshch'yu metoda minimal'nogo pokrytiia [Fractal analysis of meteorological series based on the minimal covering method]. *Geograficheskij vestnik [Geographical Bulletin]*, 2019, N 2(49), pp. 67–79. (In Russian)
- Bronshhtejn E. M., Janchushka Z. I. Fraktal'nyj podhod k formirovaniyu portfeljev cennyh bumag [Fractal approach to securities portfolio formation]. *Finansy i kredit [Finance and Credit]*, 2007, N 12(252), pp. 26–29. (In Russian)
- Demin A. V., Vitjaev E. E. Finansovyje vremennye rjady: prognozirovaniye i raspoznivaniye narushenij dinamiki [Financial time series: forecasting and recognition of dynamic disturbances] // *ZNANIJA — ONTOLOGII — TEORII (ZONT—09): Sbornik nauchnyh trudov po materialam Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem [Proceedings of the All-Russian Conference with international participation “KNOWLEDGE — ONTOLOGIES — THEORIES”]*. Novosibirsk, 2009, pp. 79–86. (In Russian)
- Dmitriev N. D., Tihonova M. V. Formirovaniye investicionnogo portfelja [Investment portfolio formation]. *Strategii biznesa [Business Strategies]*, 2019, N 5(61), pp. 17–20 (In Russian).
- Dubovikov M. M., Starchenko N. V. Ekonomizika i fraktal'nyi analiz finansovykh vremennykh ryadov [Economics and fractal analysis of financial time series]. *Uspekhi fizicheskikh nauk [Advances in Physical Sciences]*, 2011, vol. 181, N 7, pp. 779–786. (In Russian)
- Feder J. *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- Garafutdinov R. V. K zadache klassifikatsii uchastkov finansovykh vremennykh ryadov razlichnoi fraktal'noi razmernosti [To the task of classification of sections of financial time series of various fractal dimensions] // *Tatishhevskie chteniya: aktual'nye problemy nauki i praktiki: Sbornik nauchnyh trudov po materialam XVII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii [Proceedings of the 17th International Scientific and Practical Conference “Tatischev Readings: Actual Problems of Science and Practice”]*. Togliatti, 2020, pp. 226–230. (In Russian)
- Garafutdinov R. V. Obzor metodov otsenivaniia fraktal'nykh kharakteristik finansovykh vremennykh ryadov [Overview of methods for estimating the fractal characteristics of financial time series] // *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnyh i social'nyh problem: Sbornik nauchnyh trudov po materialam XIII Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii [Proceedings of the 13th International Scientific and Technical Conference “Analytical and Numerical Methods for Modeling Natural Science and Social Problems”]*. Penza, 2018, pp. 97–103. (In Russian)
- Garafutdinov R. V., Gurova Ye. P. Metodika formirovaniya investicionnogo portfelja Markovica na baze prognoznyh dohodnostej s rebalansirovkoj [Methodology of Markowitz investment portfolio formation based on forecast returns with rebalancing] // *Tatishhevskie chteniya: aktual'nye problemy nauki i praktiki: Sbornik nauchnyh trudov po materialam XVII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii [Proceedings of the 17th International Scientific and Practical Conference “Tatischev Readings: Actual Problems of Science and Practice”]*. Togliatti, 2020, pp. 230–233. (In Russian)
- Garafutdinov R., Gurova E. The formation of investment portfolios based on forecasted income with the use of fractal models. *Mathematical Modeling*, 2019, N 3, pp. 86–88.
- Kirichenko L. O., Chalaja L. Je. Kompleksnyj podhod k issledovaniju fraktal'nyh vremennykh rjadov [An integrated approach to the study of fractal time series]. *International Journal “Information Technologies & Knowledge”*, 2014, N 1, pp. 22–28. (In Russian)
- Konopleva Ju. A. Metodika modelirovaniya investicionnogo portfelja s uchedom osobennostej regional'nogo rynka cennyh bumag [Methods of investment portfolio modeling taking into account peculiarities of regional securities market]. *Upravlenie jekonomicheskimi sistemami: jelektronnyj nauchnyj zhurnal [Management of Economic Systems: Scientific Electronic Journal]*, 2015, N 6(40). Available at: <http://uecs.ru/uecs-78-782015/item/3605-2015-06-25-08-41-16> (accessed: 17.05.2020). (In Russian)
- Kosareva Ye. A. Postroenie portfelja Sharpa dlja pary aktivov v uslovijah gipotezy fraktal'nogo rynka [Application of a Sharp portfolio for a couple of assets in the conditions of the Fractal Market Hypothesis]. *Sovremennaja jekonomika: problemy i reshenija [Modern Economics: Problems and Solutions]*, 2019, N 6(114), pp. 44–54. (In Russian)
- Krivososova Ye. K., Pervachuk V. P., Krivososova Ye. A. Sravnenie fraktal'nykh kharakteristik vremennykh ryadov ekonomicheskikh pokazatelej [Comparison of the fractal characteristics of economic indicators time series]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya (elektronnyj nauchnyj zhurnal) [Modern Problems of Science and Education (scientific journal)]*, 2014, N 6. Available at: <https://www.science-education.ru/pdf/2014/6/701.pdf> (accessed 17.05.2020). (In Russian)
- Mansurov A. K. Prognozirovaniye valyutnykh krizisov s pomoshch'yu metodov fraktal'nogo analiza [Forecasting currency crises by fractal analysis techniques]. *Problemy prognozirovaniya [Forecasting Problems]*, 2008, N 1(106), pp. 145–158. (In Russian).
- Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, N 7, pp. 77–91.
- Pilgrim I., Taylor R. *Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. Fractal Analysis*. InTech, 2018, chapter 2.
- Semenenko M. G. Model' Markovica: matematicheskie aspekty i komp'yuternaja realizacija [Markowitz model: mathematical aspects and computer implementation]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie [Modern Information Technologies and IT-Education]*, 2015, N 11, pp. 306–309. (In Russian)

Simonov P. M., Garafutdinov R. V. Modelirovanie i prognozirovanie dinamiki kursov finansovykh instrumentov s primeneniem ekonometricheskikh modelei i fraktal'nogo analiza [Modeling and forecasting of financial instruments dynamics using econometrics models and fractal analysis]. *Vestnik Permskogo universiteta. Ser. "Jekonomika"* [*Perm University Herald. Economy*], 2019, vol. 14, N 2, pp. 268–288. (In Russian)

Sizov A. A. Vremennye rjady s peremennoj strukturoj [Time series with variable structure]. *Estestvennye i tehniicheskie nauki* [*Natural and technical sciences*], 2014, N 2, pp. 233–234. (In Russian)

Zagajnov A. I. Issledovanie izmenenija fraktal'nosti haoticheskikh processov na rynkah kapitala [Investigation of the Change in the Fractality of Chaotic Processes in the Capital Markets]. *Intellektual'nye tehnologii na transporte* [*Intellectual Technologies on Transport*], 2017, N 4, pp. 39–43. (In Russian)

Zinenko A. V. R/S analiz na fondovom rynke [R/S analysis of stock market]. *Biznes-informatika* [*Business Informatics*], 2012, N 3(21), pp. 24–30. (In Russian)