

В. В. Бухвалова

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры исследования операций Санкт-Петербургского государственного университета

А. С. Вингерт

магистрант математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

ЭФФЕКТЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

1. Введение

Одним из базовых понятий, без которых не обходятся большинство экономических и финансовых моделей, является «дисконтирование». Во многих учебниках по финансовым вычислениям (например, (Брейли, Майерс, Аллен, 2015) и (Бухвалов, Бухвалова, 2010)) предлагается использовать дисконтирующий множитель с постоянной ставкой дисконтирования. В этом случае дисконтирование обладает полезными математическими свойствами, но не всегда годится на практике. Последнее связано с эффектами, которые могут возникать при дисконтировании в связи с поведением людей при принятии финансовых и инвестиционных решений. Такие эффекты мы будем называть *эффектами дисконтирования*. Первые базовые модели дисконтирования были довольно просты, поэтому не учитывали подобные эффекты. Именно за счет простой структуры они получили широкое распространение, и именно на них опираются все остальные, более сложные модели. Но и более поздние модели не всегда принимали во внимание все эффекты дисконтирования. Существенным продвижением в проблеме учета эффектов дисконтирования стала работа (Scholten, Read, 2006), в которой была предложена модель Discounting by Intervals (DBI). Эта модель учитывает, как удалены дисконтируемые суммы от начального момента времени и насколько они удалены друг от друга.

Настоящая статья посвящена анализу эффектов дисконтирования, которые проявляются на практике. Для выявления этих эффектов в 2017–2018 гг. авторами статьи был проведен опрос, в котором приняло участие 104 респондента (в основном студенты Санкт-Петербурга). Анализ результатов опроса выявил преобладание иррационального поведения респондентов при принятии инвестиционных решений. Поведение только 18% респондентов можно признать рациональным в традиционном смысле (максимизация прибыли).

Статья состоит из введения, трех разделов и приложения. Второй раздел посвящен определениям понятий, которые будут использоваться в тексте статьи. В третьем разделе описаны проведенный опрос и его результаты. Последний раздел подводит итоги проведенного исследования.

2. Основные определения

В этом разделе приведены основные обозначения и определения, используемые в статье, и демонстрационные примеры.

Определение 1

Дисконтирование — определение ценности будущего денежного платежа путем его приведения к текущему моменту времени по формуле:

$$P = D(t)F, \quad (1)$$

где P — текущая ценность ($t = 0$) суммы F , полученной в момент времени t , $D(t)$ — функция дисконтирования.

Определение 2

Если функция дисконтирования задается формулой:

$$D(t) = \frac{1}{(1 + d(t))^t}, \quad (2)$$

то функция $d(t)$ называется *ставкой дисконтирования*.

На настоящий момент предложено к использованию в теории и на практике довольно много функций дисконтирования. Наиболее популярные из них описаны в работе (Andersen et al., 2014).

Вариант получения меньшей суммы, но раньше по времени будем обозначать SS (*Smaller—Sooner*), а получение большей суммы, но позже по времени LL (*Larger—Later*). Например, 1000 руб. через 1 месяц будем обозначать SS по отношению к 2500 руб. через 10 месяцев — LL . Соответственно сумму и момент времени в случае SS будем обозначать x_S и t_S , а в случае LL — x_L и t_L .

Определение 3

Приведенная ценность $V(x_\tau, t_\tau)$ суммы x_τ , полученной в момент t_τ , вычисляется по формуле и принимает вид:

$$V(x_\tau, t_\tau) = D(t_\tau)v(x_\tau), \quad (3)$$

где $v(x_\tau)$ — ценность x_τ в момент времени t_τ .

Определение 4

Точка безразличия — момент времени, в который дисконтированные ценности x_S и x_L равны: $D(t_S)v(x_S) = D(t_L)v(x_L)$.

Определение 5

Если существует точка безразличия, то *дробь дисконтирования на отрезке* $T_{SL} = [t_S; t_L]$ является мерой дисконтирования на этом отрезке и вычисляется по формуле (Scholten, Read, 2006):

$$F_{T_{SL}} = \frac{D(t_L)}{D(t_S)} = \frac{v(x_S)}{v(x_L)}. \quad (4)$$

Обозначим через t_M середину отрезка T_{SL} . Если приведенные ценности x_S, x_M и x_L равны, то верно равенство $F_{T_{SM}} = F_{T_{ML}}$. Если последнее равенство не выполняется, то говорят об эффекте дисконтирования, связанном со временем. В работе (Scholten, Read, 2006) описан эксперимент, для которого равенство $F_{T_{SM}} = F_{T_{ML}}$ не выполнялось. Авторы обнаружили посредством проведенного опроса, что дробь дисконтирования меньше для отрезка, который начинается раньше (T_{SM}), чем для отрезка, который начинается позже (T_{ML}), но имеет ту же длину (длины отрезков T_{SM} и T_{ML} равны).

Определение 6

Будем говорить, что имеет место *эффект задержки на временном отрезке*, если $F_{T_{SN}} < F_{T_{KL}}$ при $t_N - t_S = t_L - t_K$, $t_N \leq t_K$.

Если $t_N = t_K = t_M$, то по формуле (4):

$$F_{T_{SM}} = \frac{D(t_M)}{D(t_S)}, F_{T_{ML}} = \frac{D(t_L)}{D(t_M)}.$$

Таким образом, эффект задержки на отрезке характеризуется неравенством:

$$\frac{D(t_M)}{D(t_S)} < \frac{D(t_L)}{D(t_M)}. \quad (5)$$

В частности, эффект задержки на отрезке является свойством гиперболической функции дисконтирования $D(t) = 1/t$. Неравенство (5) выполняется для этой функции, что является следствием из неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

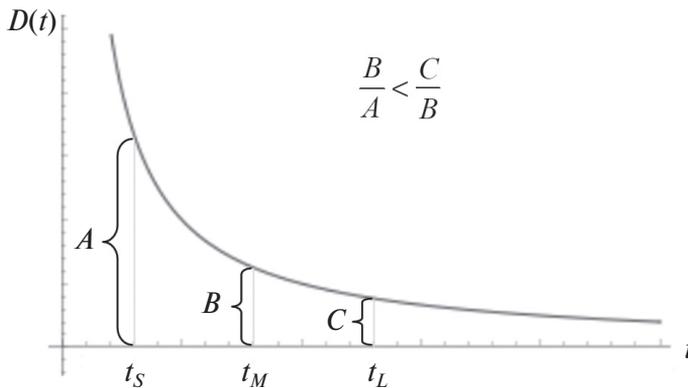


Рис. 1. Эффект задержки на временном отрезке для $D(t) = 1/t$

Поясним теперь эффект задержки на отрезке на простом числовом примере.

Пример 1. Рассмотрим выбор между двумя некоторыми суммами в двух случаях из примера (Keren, Roelofsma, 1995):

- 1: сейчас или через 4 недели;
- 2: через 26 недель или через 30 недель.

В данной ситуации $t_S = 0$, $t_N = 4$, $t_K = 26$, $t_L = 30$ (недель).

В качестве исходной точки возьмем настоящий момент времени. Заметим, что разница между моментами времени в обоих случаях одинакова и равна 4 неделям. Опрос показал, что при сравнении 30 недель с 26 неделями респондент воспринимает разницу в 4 недели меньшей, чем ту же разницу в 4 недели в первом случае. Это объясняется тем, что события, происходящие в ближайшем будущем, имеют большее влияние на человека, чем события, которые произойдут еще не скоро. Можно сказать, что люди больше ценят безотлагательность момента и настоящий момент времени.

Рассмотрим теперь другой возможный эффект дисконтирования — эффект длины временного отрезка, который может быть выявлен только эмпирическим путем. В работе (Roelofsma, Read, 2000) приведены результаты опроса, в котором участникам предлагалось сделать выбор между двумя вариантами из следующих четырех:

- $A = (7 \text{ гульденов}^1, 1 \text{ неделя}),$
- $B = (8 \text{ гульденов}, 2 \text{ недели}),$

¹ Гульден — денежная единица Нидерландов с XIII в. до 2002 г.

$C = (9 \text{ гульденов, } 4 \text{ недели}),$
 $D = (10 \text{ гульденов, } 7 \text{ недель}).$

Результаты опроса показали, что большинство людей выбирало вариант SS при выборе из соседних вариантов: $A \succ B$, $B \succ C$ и $C \succ D$. Выбор LL оказался предпочтительным при выборе в отдаленных парах (например, $A \prec D$). Таким образом, ответы не обладали свойством транзитивности и выбор между SS и LL зависел от длины временного отрезка. Участники опроса не хотели подождать немного, но были готовы ждать более долгий срок.

Введем формальное определение эффекта длины временного отрезка. Обозначим через $F_{T_{SML}}$, где $F_{T_{SML}} = F_{T_{SM}} \cup F_{T_{ML}}$, следующую величину:

$$F_{T_{SML}} = F_{T_{SM}} \cdot F_{T_{ML}}. \quad (6)$$

Определение 7

Говорят, что имеет место *эффект длины временного отрезка*, если установлено, что $F_{T_{SML}} \neq F_{T_{SL}}$.

Определение 8

Говорят, что имеет место *субаддитивное дисконтирование*, если установлено, что $F_{T_{SML}} < F_{T_{SL}}$.

Субаддитивное дисконтирование характеризует поведение респондента, который на коротких неделенных отрезках времени выбирает SS , а на более длинных LL . Таким образом, когда индивид мало не ждет, а долго ждет, возникает субаддитивное дисконтирование.

Определение 9

Говорят, что имеет место *супераддитивное дисконтирование*, если установлено, что $F_{T_{SML}} > F_{T_{SL}}$.

Напротив, супераддитивное дисконтирование характеризует поведение респондента, который на коротких неделенных отрезках выбирает LL , а на более длинных SS . Таким образом, когда респондент мало ждет, а долго не ждет, имеет место супераддитивное дисконтирование.

Важно отметить, что в последние годы лет ряд российских банков стал учитывать *супераддитивное настроение* своих клиентов. Это выразилось с том, что банки стали предлагать так называемые «лестничные» вклады, процентная ставка которых меняется от месяца к месяцу. Ниже приведены два таких примера. В первом случае (банк ВТБ24) имеет место (очевидная) супераддитивность дисконтирования и задержка на временном отрезке. Однако во втором случае (Росгосстрах банк) условия по вкладу таковы, что отсутствуют эффекты дисконтирования, о которых речь шла в этом разделе.

Пример 2. Рассмотрим вклад «Сезонный» в банке ВТБ24, который действовал с 11 сентября 2017 г. по 31 декабря 2017 г. Срок вклада составлял 7 месяцев. Проценты по этому вкладу (простые) начислялись по следующей схеме:

1 месяц	2 месяц	3 месяц	4 месяц	5 месяц	6 месяц	7 месяц
10%	10%	8,75%	6%	6%	5%	5%

Проценты, выплачиваемые банком, образовывали убывающую последовательность, следовательно, имеет место эффект задержки на отрезке. Выполним доказывающие это вычисления, приняв ставку по вкладу в качестве ставки дисконтирования.

Вычислим дробь дисконтирования на отрезках $[t_S; t_M]$ и $[t_M; t_L]$, где $t_S = 1$ месяц, $t_M = 4$ месяца, $t_L = 7$ месяцев:

$$D(1) = \frac{1}{1 + 0,1/12} = 0,992,$$

$$D(4) = \frac{1}{(1 + 0,1/12)^2(1 + 0,0875/12)(1 + 0,06/12)} = 0,972,$$

$$D(7) = \frac{1}{(1 + 0,1/12)^2(1 + 0,0875/12)(1 + 0,06/12)^2(1 + 0,05/12)^2} = 0,959,$$

$$F_{T_{SM}} = D(4) / D(1) = 0,980, F_{T_{ML}} = D(7) / D(4) = 0,987.$$

Так как выполнено неравенство $F_{T_{SM}} < F_{T_{ML}}$, то при этой функции дисконтирования имеет место эффект задержки на временном отрезке.

Пример 3. С 26 мая 2018 г. Росгосстрах банк предлагал своим клиентам вклад «Большой процент»¹, который только на первый взгляд был похож на вклад в банке ВТБ, описанный в примере 2. По этому (годовому) вкладу проценты начислялись по следующему правилу:

от 1 до 90 дней	от 91 до 180 дней	от 181 до 270 дней	от 271 до 366 дней
8,0%	6,0%	5,0%	4,5%

Однако эта таблица только имитирует эффект задержки на временном отрезке, так как по условиям вклада *выплата процентов осуществляется в конце каждого периода путем присоединения к основной сумме вклада (капитализация)*. Таким образом, вкладчик получает всю сумму процентов только через год.

Вычислим эквивалентную годовую ставку. Всего имеем четыре периода начисления процентов, пусть r_i — процентная ставка за период i , n_i — срок периода i (в днях). Напомним, что при банковском учете принято брать за весь год 360 дней. Следовательно, данное предложение не что иное, как годовой вклад со ставкой (точность вычисления процента два знака после десятичной точки):

$$r = \prod_{i=1}^4 \left(1 + r_i \frac{n_i}{360} \right) - 1 =$$

$$= (1 + 0,02000)(1 + 0,01500)(1 + 0,01250)(1 + 0,01125) - 1 = 0,06003 = 6,00\%.$$

3. Опрос

В этом разделе мы опишем метод организации и результаты проведенного нами опроса, целью которого было оценить «неявные» параметры дисконтирования, которые используют респонденты, и какие из обсуждавшихся в разделе 2 эффектов дисконтирования имеют место на практике. Мы также сравним полученные нами

¹ Мы не имеем точной информации, когда РГС банк отменил этот вклад, но 1 августа 2018 г. информация об этом вкладе отсутствовала на сайте банка (<https://www.rgsbank.ru>).

результаты с результатами аналогичного опроса, который проводился среди студентов Лондонской школы экономики (приведены в работе (Scholten, Read, 2006)).

В нашем опросе (2017/18 учебный год) принимали участие мужчины и женщины в возрасте от 18 лет, проживающие в Санкт-Петербурге. Опрос представляет собой выборочное исследование, целью которого было выявление эффектов дисконтирования на относительно коротких промежутках времени. Особо хотим подчеркнуть, что участие в опросе было добровольным и не предполагало никакого материального вознаграждения. Мы благодарны всем участникам нашего опроса, которые проявили интерес к проводившемуся исследованию и оперативно присылали заполненные анкеты. Всего в опросе приняло участие 104 респондента.

3.1. Программные средства

Опрос проводился в режиме онлайн и не предполагал никаких непосредственных контактов между организаторами опроса и респондентами. Опишем, какие программные средства использовались при проведении опроса и обработки его результатов.

Сам опрос был оформлен в виде *формы* в бесплатном приложении Google Forms и проводился онлайн. Респонденты получали доступ к опросу со своих компьютеров по полученной от организаторов опроса ссылке. Полученные ответы аккумулировались в таблицах Google и хранились в облаке. После сбора всей информации эти таблицы были перенесены из облака в таблицы Excel. Начальная обработка таблиц была выполнена средствами Excel. Для более содержательной обработки и анализа полученных результатов была написана программа на языке Python.

3.2. Структура опроса

Опрос можно разделить на две части: информационная и содержательная. Информационная часть опроса дает представление о социальном статусе респондента (возраст, сфера деятельности/образование). Распределение респондентов по возрастным и образовательно-профессиональным категориям приведено в табл. 1 (в скобках приведено абсолютное число респондентов).

Таблица 1

Информация об участниках опроса

Возраст	Род деятельности/образование			Всего	
	связан с матем./финансами		не связан		
	ММ СПбГУ	ВШМ СПбГУ			Другое
18–25	32,7% (34)	9,6% (10)	11,5% (12)	26% (27)	79,8 (83)
26–40	—	1% (1)	1,9% (2)	8,7% (9)	11,6% (12)
Более 40	1,9% (2)	—	2,9% (3)	3,8% (4)	8,6% (9)
Всего	34,6% (36)	10,6% (11)	16,3% (17)	38,5% (40)	

Все вопросы из основной части имели одинаковую структуру: участникам опроса предлагалось выбрать один из двух предлагаемых вариантов (*SS* или *LL*) в различных случаях, первым из которых всегда была ситуация *SS*, а вторым — *LL*. Таким образом, в первом варианте выбора всегда предлагались меньшая сумма и меньший срок по сравнению со вторым вариантом.

Мы выбрали в качестве минимальной суммы 10 000 руб., сочтя эту сумму достаточной, чтобы о ней задумались опрашиваемые нами респонденты (см. табл. 1).

Временные интервалы задавались в неделях (1–4) или месяцах (3, 6 или 12). Максимальный временной интервал составлял 12 месяцев, что соответствует (с точностью до месяца) максимальному сроку большинства банковских вкладов в РФ.

При увеличении временного интервала на одну неделю предлагаемая сумма увеличивалась на 500 руб., а при увеличении на один месяц — на 2000 руб. Это соответствует 5% в неделю (именно такой процент использовался в опросе из работы (Scholten, Read, 2006)). Таким образом, в первом вопросе $SS = (10\ 000\ \text{руб.}, 1\ \text{неделя})$, $LL = (10\ 500\ \text{руб.}, 2\ \text{недели})$. На рис. 2 в качестве примера приведен вопрос 1 с вариантами ответа.

Вопрос 1 *

- Получить через 1 неделю 10 000 руб.
- Получить через 2 недели 10 500 руб.

Рис. 2. Пример вопроса

Заметим, что 5% в неделю было существенно выше процента по банковским вкладам на момент проведения опроса. Однако этот процент соответствует (тогда и сейчас) среднему проценту по займам в микрофинансовых организациях¹. Процент в этих организациях обычно указывается в день и составляет до 1,5%.

Всего в опросе было использовано 7 различных вариантов выбора, и все они перечислены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты выбора

Обозначение	Сумма, руб.	Временной интервал
<i>A</i>	10 000	1 неделя
<i>B</i>	10 500	2 недели
<i>C</i>	11 000	3 недели
<i>D</i>	11 500	4 недели
<i>E</i>	15 500	3 месяца
<i>F</i>	21 500	6 месяцев
<i>G</i>	33 500	12 месяцев

Таблица 3

Перечень вопросов

Номер вопроса	<i>SS</i>	<i>LL</i>	Номер вопроса	<i>SS</i>	<i>LL</i>
1	<i>A</i>	<i>B</i>	12	<i>C</i>	<i>E</i>
2	<i>B</i>	<i>C</i>	13	<i>D</i>	<i>E</i>
3	<i>C</i>	<i>D</i>	14	<i>A</i>	<i>F</i>
4	<i>A</i>	<i>C</i>	15	<i>B</i>	<i>F</i>
5	<i>A</i>	<i>D</i>	16	<i>C</i>	<i>F</i>
6	<i>B</i>	<i>D</i>	17	<i>D</i>	<i>F</i>
7	<i>E</i>	<i>F</i>	18	<i>A</i>	<i>G</i>
8	<i>F</i>	<i>G</i>	19	<i>B</i>	<i>G</i>
9	<i>E</i>	<i>G</i>	20	<i>C</i>	<i>G</i>
10	<i>A</i>	<i>E</i>	21	<i>D</i>	<i>G</i>
11	<i>B</i>	<i>E</i>			

¹ См., например, информацию на сайте ООО МФК «Саммит» («Центр Займов», «Доброзайм») <https://dobrozaim.ru>.

Вопросы из основной части опроса представляют собой попарное сравнение всех возможных вариантов выбора из табл. 2. При этом варианты выбора всегда указываются в порядке (SS , LL). Количество вопросов равно $C_7^2 = 21$. Полный список вопросов приведен в табл. 3. Таким образом, каждому вопросу соответствует ΔP разность сумм и Δt интервал времени между вариантами SS и LL . Например, для вопроса 5 (A vs D) эти величины равны $\Delta P = 1500$, $\Delta t = 3$ (недели).

3.3. Представление результатов опроса

Для наглядного изображения и удобства обработки ответов участников опроса было решено применить ориентированные графы. Заметим, что именно математическое свойство графа, как будет показано далее в тексте, позволило нам существенно сократить процедуру обработки данных. Графы уже давно широко применяются в подобных моделях. Из многих источников, содержащих красивые примеры применения этого аппарата для прикладных задач, упомянем только неустаревавшую книгу (Кемени, Снелл, 1972).

Количество респондентов нашего опроса (графов) обозначим через $N = 104$. Ответы участника i представим в виде полного ориентированного графа $Q_i = (V; E)$, где $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ — множество вершин ($|V| = 7$), $E \subset V \times V$ — множество ориентированных ребер ($|E| = 21$). Направление дуги соответствует выбору участника в вопросе. Например, если в вопросе 1 (A vs B) был выбран вариант A , то соответствующий граф содержал дугу, направленную из вершины B в вершину A ($A \leftarrow B$). Пример графа для участника опроса под номером 91 (Q_{91}) приведен на рис. 3.

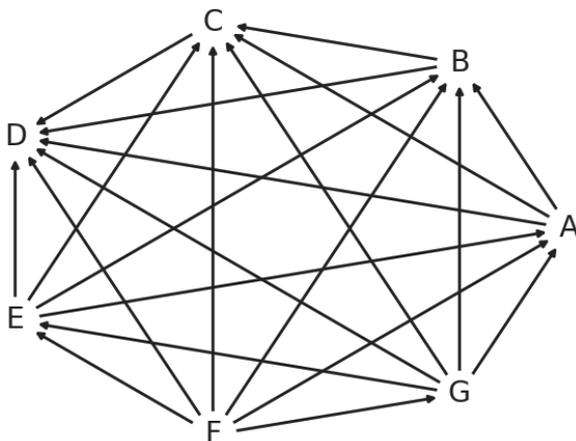


Рис. 3. Пример графа: Q_{91}

3.4. Классификация респондентов

Классификация респондентов выполнялась в несколько этапов. На первом этапе все респонденты (соответствующие им графы) были разделены на две группы: в первую группу (TR) вошли респонденты, все ответы которых не нарушали свойство транзитивности, во вторую нетранзитивную группу (ITR) — остальные респонденты.

В терминах теории графов это означает, что в группу TR вошли графы, не содержащие циклов. Для полных графов легко доказать следующее утверждение, которое существенно сокращает проверку графов на наличие в них циклов.

Утверждение. Если полный граф содержит цикл, количество дуг в котором больше трех, то он содержит цикл, состоящий из трех дуг.

Таким образом, достаточно было проверить графы на наличие в них циклов, содержащих ровно три дуги. В результате было установлено, что в транзитивную группу TR вошло несколько больше респондентов — 58 (55,8%), а внутранзитивную ITR — 46 (44,2%). На рис. 4 приведены примеры графов из обеих групп: $Q_{37} \in TR$, $Q_{44} \in ITR$ (выделены дуги единственного в нем цикла ($A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$)).

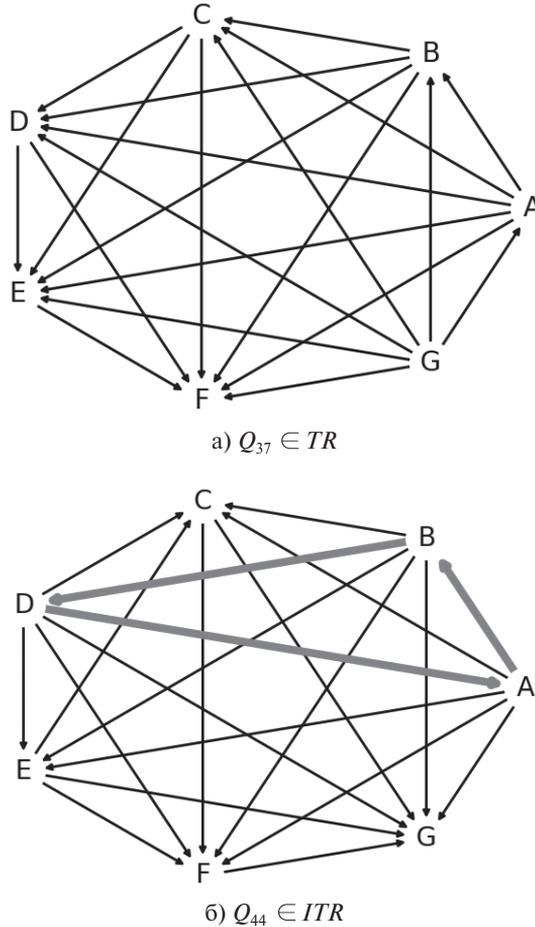


Рис. 4. Примеры полученных графов ответов

На втором этапе анализа транзитивная группа TR была разделена на три подгруппы: тех, кто всегда выбирал SS (подгруппа TR_{SS}), тех, кто всегда выбирал LL (TR_{LL}), и остальных (TR_{SL}). Про респондентов из подгруппы TR_{SS} (28 человек, 26,9%), мы можем только сказать, что их ставка дисконтирования больше 5% (в неделю) на всех предложенных временных интервалах. Что касается респондентов из подгруппы TR_{LL} (19 человек, 18,3%), то можно предположить, что их ставка дисконтирования не превосходит 5% на всех предложенных временных интервалах. Поведение респондентов из подгруппы TR_{LL} является рациональным в традиционном смысле (максимизация дохода). В подгруппу TR_{SL} попали 11 респондентов (10,6%). Именно у респондентов из этой подгруппы ставка дисконтирования меняется в зависимости от длины временного интервала. На рис. 5 приведены примеры графов из подгрупп TR_{LL} ($Q_3 \in TR_{LL}$), TR_{SS} ($Q_4 \in TR_{SS}$) и TR_{SL} ($Q_{10} \in TR_{SL}$).

На третьем этапе анализа нетранзитивная группа ITR была также разделена на три подгруппы: ITR_{sub} (дисконтирование респондентов обладает свойством

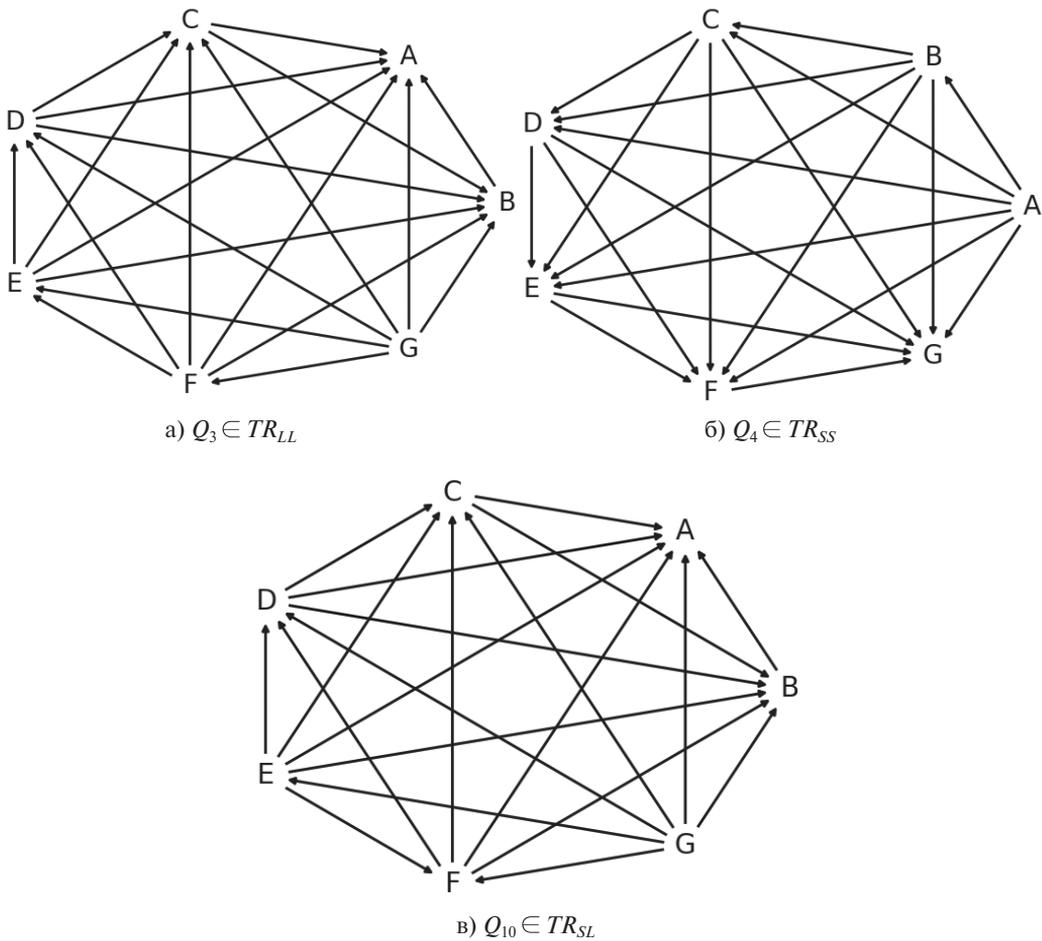


Рис. 5. Примеры транзитивных графов

субаддитивности), ITR_{super} (дисконтирование респондентов обладает свойством супераддитивности), ITR_a (оставшиеся респонденты из группы ITR). Поясним сделанное распределение по подгруппам подробнее.

Субаддитивность в ответах. Для выявления наличия свойства субаддитивности в ответах респондента из группы ITR его ответы на вопросы были проанализированы в порядке возрастания характеристики Δt (табл. 4). Заметим, что в опросе вопросы предлагались в другом порядке (табл. 3).

Поведение респондента называется *субаддитивным*, если он выбирает вариант ответа SS до определенного интервала времени Δt_{sub} , а после этого всегда выбирает вариант ответа LL . Однако мы допустили некоторую непоследовательность (или возможность ошибиться) в поведении респондентов, которую назвали аномалиями. Аномалия — это выбор варианта ответа LL до Δt_{sub} и варианта ответа SS после Δt_{sub} . В подгруппу ITR_{sub} были включены респонденты, поведение которых было субаддитивным, если исключить из их ответов аномалии и число аномалий не превосходит четырех (что составляет 19% вопросов). Удаление аномалий из ответов делает поведение респондента субаддитивным. Примеры респондентов и их ответы из подгруппы ITR_{sub} приведены в табл. 4. Всего в этой подгруппе оказалось 12 (11,5%) респондентов, и только четыре из них не имели аномалий.

Поясним, как выбирался временной интервал Δt_{sub} , после которого респондент меняет свое поведение (до — SS , после — LL). Интервал Δt_{sub} выбирается

таким образом, чтобы минимизировать количество аномалий в ответах. Таким образом, для Q_6 респондента $\Delta t_{sub} = 9$ (4 аномалии), так как если положить, например, $\Delta t_{sub} = 12$, число аномалий увеличится до 5. Но для Q_{12} респондента $\Delta t_{sub} = 12$ (3 аномалии), так как если положить, например, $\Delta t_{sub} = 9$, число аномалий увеличится до четырех.

Таблица 4

Примеры респондентов из подгруппы $I TR_{sub}$

Вопрос (Δt)	Q_6	Q_{12}	Q_{18}	Q_{20}	Q_{84}
<i>A vs B</i> (1)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>
<i>B vs C</i> (1)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>
<i>C vs D</i> (1)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>A vs C</i> (2)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>B vs D</i> (2)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>A vs D</i> (3)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>D vs E</i> (9)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>C vs E</i> (10)	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>B vs E</i> (11)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>A vs F</i> (12)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>E vs F</i> (13)	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>D vs F</i> (22)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>C vs F</i> (23)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>B vs F</i> (24)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>A vs F</i> (25)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>
<i>F vs G</i> (26)	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>E vs G</i> (39)	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>D vs G</i> (48)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>C vs G</i> (49)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>B vs G</i> (50)	<i>LL</i>	<i>SS</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
<i>A vs G</i> (51)	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>	<i>LL</i>
Δt_{sub}	9	12	48	1	22
Количество аномалий	4	3	2	0	1

Супераддитивность в ответах. Как и в предыдущем случае, ответы на вопросы оставшихся респондентов из группы $I TR$ были проанализированы в порядке возрастания характеристики Δt (табл. 5).

Поведение респондента называется *супераддитивным*, если он выбирает вариант ответа *LL* до определенного интервала времени Δt_{super} , а после этого всегда выбирает вариант *SS*. Как и в случае субаддитивности, мы допустили некоторую непоследовательность (или возможность ошибиться) в выборе ответов респондентами, которую назвали аномалиями. Аномалия в этом случае — выбор варианта ответа *SS* до Δt_{super} , и варианта ответа *LL* после Δt_{super} . В подгруппу $I TR_{super}$ были включены респонденты, поведение которых было супераддитивным, если исключить из их ответов аномалии и число аномалий не превосходит четырех (19% вопросов). Принцип выбора интервала Δt_{super} остался прежним: минимизация числа аномалий. Удаление аномалий из ответов делает поведение респондента этой подгруппы супераддитивным. Респонденты и их ответы из подгруппы $I TR_{super}$ перечислены в

табл. 5. Всего в этой группе оказалось 6 (5,8%) респондентов, что в два раза меньше числа респондентов в подгруппе ITR_{sub} . При этом три респондента из них (Q_{85} , Q_{100} , Q_{103}) были на редкость последовательными и не имели ни одной аномалии.

Таблица 5

Респонденты из подгруппы ITR_{super}

Вопрос (Δt)	Q_{21}	Q_{52}	Q_{75}	Q_{85}	Q_{100}	Q_{103}
$A vs B (1)$	LL	LL	SS	LL	LL	LL
$B vs C (1)$	LL	LL	LL	LL	LL	LL
$C vs D (1)$	LL	LL	LL	LL	LL	LL
$A vs C (2)$	LL	LL	SS	LL	LL	LL
$B vs D (2)$	LL	SS	SS	SS	LL	LL
$A vs D (3)$	LL	SS	SS	SS	SS	LL
$D vs E (9)$	LL	LL	SS	SS	SS	LL
$C vs E (10)$	SS	SS	SS	SS	SS	LL
$B vs E (11)$	SS	SS	SS	SS	SS	LL
$A vs F (12)$	SS	SS	SS	SS	SS	SS
$E vs F (13)$	LL	SS	LL	SS	SS	SS
$D vs F (22)$	LL	SS	SS	SS	SS	SS
$C vs F (23)$	LL	SS	SS	SS	SS	SS
$B vs F (24)$	LL	SS	SS	SS	SS	SS
$A vs F (25)$	LL	SS	SS	SS	SS	SS
$F vs G (26)$	LL	SS	LL	SS	SS	SS
$E vs G (39)$	LL	SS	LL	SS	SS	SS
$D vs G (48)$	SS	SS	SS	SS	SS	SS
$C vs G (49)$	SS	SS	SS	SS	SS	SS
$B vs G (50)$	SS	SS	SS	SS	SS	SS
$A vs G (51)$	SS	SS	SS	SS	SS	SS
t_{super}	48	2	2	2	3	12
Количество аномалий	3	1	4	0	0	0

Респонденты, которые не вошли ни в подгруппу ITR_{sub} , ни в подгруппу ITR_{super} , были включены в особую подгруппу ITR_a (28 респондентов, 26,9%). В наших терминах, в ответах респондентов из этой подгруппы было больше 4 аномалий, поэтому будем и саму подгруппу называть аномальной. Пример графа респондента из аномальной подгруппы приведен на рис. 6. Штриховыми линиями показаны имеющиеся в графе циклы.

Таким образом, было получено следующее распределение респондентов по группам и подгруппам:

1. Транзитивная группа TR , $|TR| = 58$ (55,8%):
 - всегда готовы ждать TR_{LL} , $|TR_{LL}| = 19$ (18,3%)
 - никогда не ждут TR_{SS} , $|TR_{SS}| = 28$ (26,9%)
 - смешанное поведение TR_{SL} , $|TR_{SL}| = 11$ (10,6%).
2. Нетранзитивная группа ITR , $|ITR| = 46$ (44,2%):
 - субаддитивные ITR_{sub} , $|ITR_{sub}| = 12$ (11,5%)
 - супераддитивные ITR_{super} , $|ITR_{super}| = 6$ (5,8%)
 - аномальные ITR_a , $|ITR_a| = 28$ (26,9%).

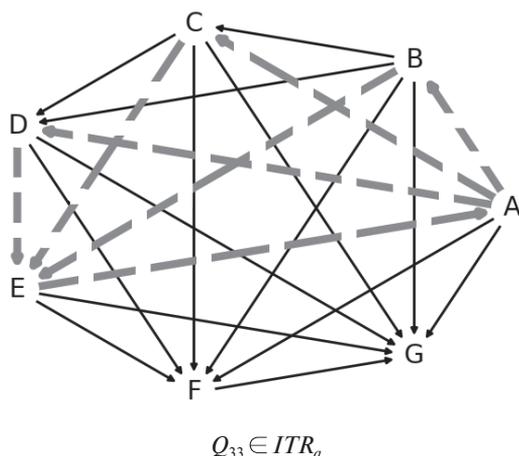
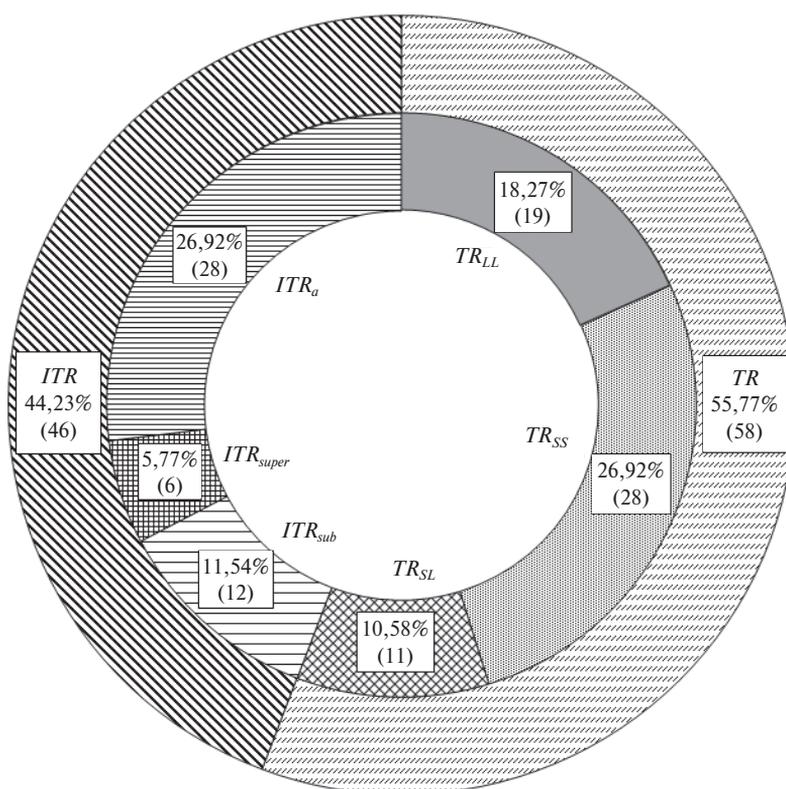
Рис. 6. Пример графа респондента из подгруппы ITR_a 

Рис. 7. Распределение респондентов

Круговая диаграмма этого распределения приведена на рис. 7.

Следует обратить внимание на респондентов из подгрупп TR_{SL} и ITR_a . Вместе в этих подгруппах 39 респондентов, что составляет более трети опрошенных (37,5%) от общего числа респондентов. В ответах этих респондентов не удалось выявить ни одно из анализируемых свойств дисконтирования. Организаторы опроса предположили, что, респонденты из этих подгрупп отвечали на вопросы случайным образом. По крайней мере, на некоторые из них.

3.5. Сравнение организации и результатов опросов

Похожий опрос ранее был проведен авторами статьи (Scholten, Read, 2006a). В этой работе он описан как Experiment 1. Далее мы будем ссылаться на него как на опрос SR06. По количеству респондентов опрос SR06 был близок к нашему опросу: в опросе участвовало 120 студентов Лондонской школы экономики (у нас 104 респондента). Заметим, что в других работах описываются и анализируются результаты опросов с существенно меньшим числом участников. Например, в (Scholten, Read, 2006b) проводится подробный статистический анализ опроса, в котором участвовали 34 студента Лондонской школы экономики и 18 студентов Института прикладной психологии Лиссабона. Во всех упомянутых выше опросах полагалось вознаграждение за участие в опросе (5 фунтов или 7,5 евро). Участие в нашем опросе не предполагало никакого вознаграждения.

В качестве вопросов в опросе SR06 предлагалось в случайном порядке попарное сравнение 4 вариантов выбора (6 вопросов), которые приведены в табл. 6. Мы увеличили число вариантов выбора до 7 (21 вопрос), увеличив временной интервал до одного года (52 недели). Именно существенное расширение временного интервала не позволяет выполнить корректное сравнение всех полученных результатов.

Компенсация в опросе SR06 за ожидание в одну неделю составляла 25 фунтов, что соответствует 5% в неделю. Напомним, что мы использовали такой же процент в нашем опросе.

Таблица 6

Варианты выбора

Обозначение	Сумма (фунты)	Временной интервал
<i>A</i>	500	1 неделя
<i>B</i>	525	2 недели
<i>C</i>	550	3 недели
<i>D</i>	575	4 недели

В обоих опросах использовалось разбиение респондентов на транзитивную и нетранзитивную группы, предложенное в работе (Roelofsma, Read, 2000). В опросе SR06 доля группы TR больше: 70% (у нас 55,8%), а разбиение на подгруппы не проводилось. В подгруппу ITR_{super} (супераддитивность) вошли 10% респондентов (у нас 5,8%), а в подгруппу ITR_{sub} (субаддитивность) — только 4,2% (у нас 11,5%). То есть соотношение между численностью этих подгрупп противоположное в двух опросах. Однако сравнивать эти показатели не совсем корректно, так как мы допускали аномалии в ответах из-за существенно большего числа вопросов.

Заключение

История появления и практического использования понятия «дисконтирование» весьма интересна и требует отдельного рассмотрения. Приведем только два факта, непосредственно связанных с этим. До недавнего времени считалось, что первым использовал концепцию дисконтирования Фибоначчи (Леонардо Пизанский) в его основном труде «LiberAbaci» (1202). Подробно о том, какие именно финансовые задачи и как умел решать Фибоначчи, разбирается в работе (Goetzmann, 2003). Однако сравнительно недавно появилась публикация, в которой утверждается, что концепция дисконтирования и межвременного анализа

была разработана задолго до этого в работах легендарного индийского ученого Каутилья (Kautilya) еще в IV в. до н.э. (Sihag, 2017).

Современная теория моделей дисконтирования началась в 1930-е гг. с работ И. Фишера (Fisher, 1930), П. Самуэльсона (Samuelson, 1937) и Дж. Вильямса (Williams, 1938). Развитие этого направления успешно продолжается и в наши дни, о чем свидетельствует приведенный в приложении список основных моделей дисконтирования. В этом списке указано, кем и когда была предложена соответствующая модель и какими свойствами обладает. Однако представляет интерес проверка, насколько эти модели описывают реальные процессы дисконтирования. Видимо, главный инструмент такой проверки — это проведение опросов. Однако проведение опросов и анализ их результатов являются весьма затратным процессом. Видимо, по этой причине число публикаций на эту тему сравнительно невелико. Однако появление в последнее время специальных программных средств существенно упростило проведение опросов. Мы по возможности подробно рассказали, как мы проводили опрос и анализ его результатов.

Источники

- Беннинга Ш. Основы финансов с примерами в Excel / пер. с англ. М., 2014.
- Брейли Р., Майерс С., Аллен Ф. Принципы корпоративных финансов / пер. с англ. М., 2015.
- Бухвалов А. В., Бухвалова В. В. Финансовые вычисления для менеджеров. СПб., 2010.
- Кемени Д., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование / пер. с англ. М., 1972.
- al-Nowaihi A., Dhimi S. Discounting by Intervals: An Inconsistent Theory of Intertemporal Choice? / University of Leicester. Working Paper N 08/10. April. 2008.
- Andersen S. et al. Discounting Behavior: A Reconsideration // European Economic Review. 2014. Vol. 71. P. 15–33.
- Fisher I. The Theory of Interest. N. Y., 1930.
- Goetzmann W. N. Fibonacci and the Financial Revolution // Yale ICF. Working Paper N 03-28, October 23, 2003.
- Keren G., Roelofsma P. Immediacy and Certainty in Intertemporal Choice // Organization Behavior Human Decision Process. 1995. Vol. 63. N 3. P. 287–297.
- Read D. Is Time-discounting Hyperbolic or Subadditive? // Journal Risk Uncertainty. 2001. Vol. 23. N 1. P. 5–32.
- Roelofsma P., Read D. Intransitive Intertemporal Choice // Journal Behavior Decision Making. 2000. Vol. 13. N 2. P. 161–177.
- Samuelson P. A note on Measurement of Utility // Review of Economic Studies. 1937. Vol. 4. Iss. 2. P. 155–161.
- Scholten M., Read D. Discounting by Intervals: A Generalized Model of Intertemporal Choice // Management Science. 2006a. Vol. 15. N 9. P. 1424–1436.
- Scholten M., Read D. Beyond Discounting: the Tradeoff Model of Intertemporal choice. Operational Research working papers. Operational Research Group, Department of Management / London School of Economics and Political Science. London, 2006b.
- Sihag B. S. Kautilya, Fibonacci and Samuelson on Discounting // Advances in Management & Applied Economics. 2017. Vol. 7. N 2. P. 45–57.
- Simon A. Y. Rationality as Process and as Product of Thought. Richard T. Ely Lecture // American Economic Review. 1978. Vol. 68. May. N 2. P. 1–16.
- Tversky A. Intransitivity of Preferences // Psychological Review. 1969. Vol. 76. N 1. P. 31–48.
- Williams J. The Theory of Investment Value. Harvard University Press, 1938.

References

- Benninga S. *Osnovy finansov s primerami v Excel [Fundamentals of Finance with examples in Excel]*. Moscow, 2014. (In Russian)
- Braley R., Myers S., Allen F. *Principy korporativnyh finansov [Principles of Corporate Finance]*. Moscow, 2015. (In Russian)

- Bukhvalov A. V., Bukhvalova V. V. *Finansovye vychisleniya dlya menedzherov* [Financial Computing for Managers]. SPb., 2010. (In Russian)
- Kemeny D. Snell J. *Kiberneticheskoe modelirovanie* [Cybernetic modeling]. Moscow, 1972. (In Russian)
- al-Nowaihi A., Dhimi S. *Discounting by Intervals: An inconsistent theory of intertemporal choice?* / University of Leicester. Working Paper N 08/10. April. 2008.
- Andersen S. et al. Discounting behavior: A reconsideration. *European Economic Review*, 2014, vol. 71, pp. 15–33.
- Fisher I. *The Theory of Interest*. New York, 1930.
- Goetzmann W. N. *Fibonacci and the Financial Revolution*. Yale ICF Working Paper N 03-28, October 23, 2003.
- Keren G., Roelofsma P. Immediacy and Certainty in Intertemporal Choice. *Organization Behavior Human Decision Process*, 1995, vol. 63, N 3, pp. 287–297.
- Read D. Is Time-discounting Hyperbolic or Subadditive? *Journal Risk Uncertainty*, 2001, vol. 23, N 1, pp. 5–32.
- Roelofsma P., Read D. Intransitive Intertemporal Choice. *Journal Behavior Decision Making*, 2000, vol. 13, N 2, pp. 161–177.
- Samuelson P. A note on Measurement of Utility. *Review of Economic Studies*. 1937, vol. 4, iss. 2, pp. 155–161.
- Scholten M., Read D. Discounting by Intervals: A Generalized Model of Intertemporal Choice. *Management Science*, 2006a, vol. 15, N 9, pp. 1424–1436.
- Scholten M., Read D. *Beyond Discounting: the Tradeoff Model of Intertemporal choice*. Operational Research working papers. Operational Research Group, Department of Management, London School of Economics and Political Science. London, 2006b.
- Sihag B. S. Kautilya, Fibonacci and Samuelson on Discounting. *Advances in Management & Applied Economics*, 2017, vol. 7, N 2, pp. 45–57.
- Simon A. Y. Rationality as Process and as Product of Thought. Richard T. Ely Lecture. *American Economic Review*, 1978, vol. 68, May, N 2, pp. 1–16.
- Tversky A. Intransitivity of Preferences. *Psychological Review*, 1969, vol. 76, N 1, pp. 31–48.
- Williams J. *The Theory of Investment Value*. Harvard University Press, 1938.