

ФИНАНСОВЫЕ РЫНКИ

А. Б. Шаповал¹

канд. физ.-мат. наук, доцент Финансового университета при Правительстве РФ, Международного института теории прогноза и математической геофизики РАН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ МЕЖДУ КРАХАМИ И ОЦЕНКА АЛГОРИТМОВ ПРОГНОЗА

1. Введение

Формальная задача предсказания динамики финансовых инструментов в реальном времени состоит из двух составных частей: разработка алгоритмов прогноза и оценка их эффективности. Для прогноза обычно используют регрессионные модели. Их принято считать эффективными, если предсказанные ими значения временного ряда согласуются с выборочными данными, по которым построена регрессия. Однако современный анализ предсказуемости основан на мониторинге данных вне учебной выборки. Эффективность прогноза оценивается с помощью некоторой функции потерь, не зависящей от прогнозной стратегии (Pesaran, Timmermann, 1992). Установлено, что линейные модели временных рядов имеют примерно такую же предсказуемость как случайное блуждание со сносом (Mizrach, 1992). Напротив, эффективность прогноза у нелинейных регрессионных моделей существенно выше, чем у случайного блуждания. С помощью нелинейных моделей оценена предсказуемость финансовых рынков различных стран, в том числе США (Fama, French, 1989), Великобритании, (Clare et al., 1994), европейских развивающихся стран (Rockinger, Urga, 2000, 2001, Zalewska-Mitura, Hall, 1999). Существенно, что качество прогноза ухудшается, если увеличить время мониторинга прогнозной модели (Aiolfi, Favero, 2003).

Ухудшение прогноза при увеличении времени мониторинга может быть объяснено с помощью гипотезы эффективного рынка (Malkiel, 1992). В простейшей форме она означает, что если разработан и применен на практике высококачественный алгоритм прогноза, то он обретет популярность и рынок откликнется на существование алгоритма. В результате отклика качество алгоритма со временем упадет (формально, гипотезы эффективного рынка недостаточно для непредсказуемости его динамики без предположения о риск-нейтральности агентов, Timmermann, Granger, 2004).

Существование структурных изменений рынка также может негативно влиять на качество алгоритмов прогноза. Найденные с помощью регрессионных моделей локальные паттерны (характеризующую учебную выборку) исчезают после структурных изменений (Rapach, Wohar, 2006).

На практике чиновник должен выбирать тест, определяющий эффективность алгоритма прогноза. Поэтому принципы сравнения тестов должны быть прозрачны. В настоящее время типичный способ сравнения имеет следующий

¹ Эл. адрес: shapoval@mccme.ru

вид. При анализе алгоритма, определяющего предсказуемость временного ряда в скользящем временном окне, в статье (Anatolyev, Gerko, 2005) утверждается, что тест А лучше теста В, потому что он обладает той же мощностью, но раньше сигнализирует о вхождении временного ряда в стадию повышенной предсказуемости. Однако для подтверждения сделанного вывода о преимуществе одного теста над другим требуется дополнительная оценка достоверности прогнозируемого события, т. е. что временной ряд действительно входит в фазу предсказуемости.

Итак, в рамках регрессионных моделей задача прогноза сталкивается по крайней мере с двумя проблемами:

- как найти паттерны, имеющие место на больших временах;
- как выбрать оптимальный тест эффективности модели.

Эти проблемы разрешимы для идентификации в реальном времени *момента* наступления целевых (т. е. прогнозируемых) событий. Под целевыми событиями следует понимать редкие явления, например наибольшие скачки временного ряда. Для решения задачи прогноза в этой постановке требуется разделить исследуемый временной интервал на промежутки двух видов. На одних промежутках ожидается целевое событие и объявляется тревога, на других тревога не объявляется. Правило объявления тревог находят методами теории распознавания образов (Гельфанд и др., 1975). Увеличение выборки в данном случае помогает найти более точное правило объявления тревог, а увеличение времени мониторинга — оценить качество найденного правила.

Каждое целевое событие может быть либо предсказано, либо нет. Поэтому в рассматриваемой задаче имеет место выбор из двух альтернатив. Для оценки алгоритма прогноза, осуществляющего этот выбор, адаптирован метод проверки статистических гипотез (Molchan, 1997). Этот метод в соответствии с современными требованиями использует целевую функцию, не зависящую ни от выборки, ни от оцениваемого алгоритма.

В настоящей работе проверяется, является ли случайной последовательность «обвалов» фондовых индексов. В качестве простейшей характеристики «обвалов» выбрано время между ними. Случайному появлению «обвалов» соответствует показательное распределение выбранной статистики. В статье установлено, что распределение времени между «обвалами» имеет значительное отклонение от показательного. Реальные данные по сравнению с пуассоновским процессом обладают большей кластеризацией скачков. Найденная кластеризация обеспечивает определенную эффективность простейшего алгоритма прогноза, объявляющего тревогу на некоторое время (которое является параметром алгоритма) после крупного падения индекса.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе изучено распределение лог-доходностей индексов DJI и HS и определены события, к которым в дальнейшем применяется алгоритм прогноза. Распределение времени между «обвалами» исследовано в разд. 3. В разд. 4 построен алгоритм прогноза крупных «обвалов». Заключительные выводы сделаны в разд. 5.

2. Распределение лог-доходностей

Целевые события. С произвольным индексом фондового рынка связан временной ряд лог-доходностей. Лог-доходность $r(t)$ за время Δt в момент времени t определяется формулой

$$r(t) = \ln(p(t + \Delta t)/p(t)),$$

где $p(t)$ — значение индекса в момент t .

Мы пользуемся ежедневными данными о цене закрытия индексов (которые находятся в открытом доступе). *Целевыми событиями* назовем лог-доходности, меньшие некоторого r^* . Именно эти события предназначены для прогноза. Значение r^* является параметром. При достаточно большом по абсолютному значению отрицательном r^* речь идет о крупнейших однодневных «обвалах» фондовых индексов. Чтобы зафиксировать r^* , естественно исследовать распределение лог-доходностей.

Убывание лог-доходностей. Согласно (Mantegna, Stanley, 1999; Романовский, Романовский 2007; Silva, 2004) распределение лог-доходностей близко к экспоненциальной функции в своей центральной части и к степенной на краях («хвостах»). На рис. 1 показано распределение лог-доходностей для DJI и HS (одних из наиболее значимых американских и азиатских фондовых индексов), согласующееся с теоретическим предсказанием. Данные взяты на сайте yahoo.com (выбраны промежутки 2 февраля 1956 г. — 7 июля 2008 г. для DJI и 31 декабря 1986 г. — 7 июля 2008 г. для HS).

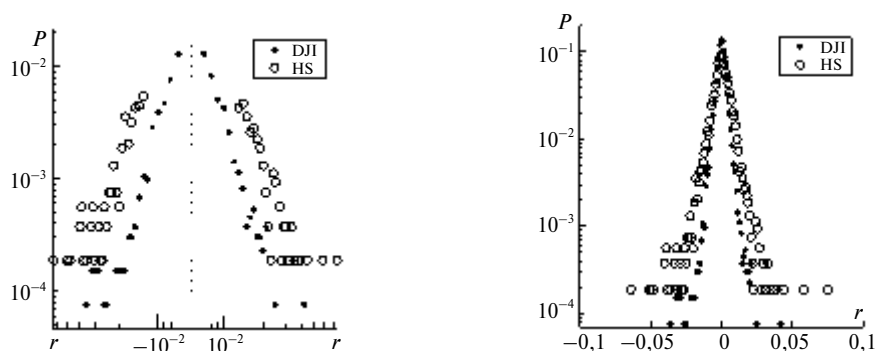


Рис. 1. Доля событий (значений лог-доходностей) на интервалах, экспоненциально растущей длины, для «хвоста» распределения (слева) и полного распределения (справа) индексов Dow Jones (DJI) и Hang Seng (HS)

Пусть выборка $\{r(t), t = 1, \dots, v\}$ содержит v ежедневных лог-доходностей некоторого индекса фондового рынка. Через $q(r)$ обозначим количество лог-доходностей выборки, лежащих на интервале $[r/\Delta r, r\Delta r]$, $\Delta r = 1,001$. Функция $q(r)$ рассматривается в точках $r_0, r_0\Delta r, \dots$, где доходность r_0 фиксирована, составляющих экспоненциально растущую последовательность. Введем $P(r) = q(r)/v$ — нормированную функцию $q(r)$. Функция $P(r)$ содержит больше информации о распределении редких значений выборки, чем обычная гистограмма (получаемая суммированием относительных частот по промежуткам фиксированной длины), так как суммирование в определении $P(r)$ происходит по интервалам, длина которых увеличивается с ростом r (и имеет место значимая представительность редких событий). С другой стороны, если плотность распределения лог-доходностей на краях близка к степенной, то $P(r)$ также окажется близкой к степенной функции, поскольку при интегрировании по отрезкам экспоненциально растущей длины степенная функция переходит в степенную. «Хвосты» распределения лог-доходностей DJI и HS в двойном логарифмическом масштабе близки к линейной функции (рис. 1, слева), что согласуется с гипотезой о степенном характере убывания распределения на краях.

Экспоненциальное убывание в центральной части распределения. Чтобы проверить экспоненциальное убывание в центральной части распределения, логарифмируется только вертикальная ось при изображении $P(r)$, тогда как горизонтальная ось остается линейной (рис. 1, справа). Тогда экспоненциальному убыванию функции $P(r)$ соответствует линейная функция на графике. Действи-

тельно, участок $P(r)$, близкий к линейному, имеет место на рисунке. Однако края распределения убывают медленнее, чем экспонента, что соответствует степенному распределению «хвостов» $P(r)$, показанному на рис. 1, слева. Через r_{1-} обозначается точка перехода от экспоненциального убывания к степенному.

Показатели экспоненты (на рис. 1, справа), видимо, различны, а степенного закона (рис. 1, слева), напротив, близки друг к другу, что также согласуется с известными статистическими свойствами финансовых инструментов (Mantegna, Stanley, 1999).

Рис. 1 приводится здесь для полноты изложения и не претендует на полное обоснование свойств распределения лог-доходностей по размерам, которое приведено, в частности, в (Mantegna, Stanley, 1999; Романовский, Романовский 2007; Silva, 2004). Выбор конкретной дискретизации множества, на котором показаны значения функции $P(r)$, не существенен.

3. Распределение времени между целевыми событиями

Пусть r^* , определяющее целевые события, фиксировано. Через $\rho(\cdot)$ обозначим плотность распределения времени между целевыми событиями (РВЦС). Построим функцию $\rho(\cdot)$ по выборке с помощью следующей процедуры. Пусть $F(t)$ — выборочная функция РВЦС.

В каждой точке t области определения график функции $F(t)$ аппроксимируется линейной функцией по нескольким близким точкам $((t_j, F(t_j)), j = -J, \dots, J, t_{j_0} = t$, в вычислениях фиксировано $J = 2$). Наклон построенной аппроксимации будем считать значением плотности $\rho(\cdot)$ в точке t .

Если последовательность целевых событий не обладает памятью, то ей соответствует показательное распределение времени между событиями. Отклонение Σ_e плотности ρ от экспоненциальной функции для индексов DJI и HS приведены в табл. 1.

Отклонение σ_e определяется формулой

$$\sigma_e = \min_{f_e} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\log \rho(t_i) - \log f_e(t_i))^2 / (n-2)},$$

где f_e — аппроксимирующая экспонента; t_i — точки аппроксимации; n — количество точек t_i на интервале аппроксимации.

Аппроксимации построены на интервалах $[t_1, t_2]$, зависящих от r^* , где t_2 соответствует наибольшим промежуткам между «обвалами», а t_1 незначительно превышает единицу. Положительный отступ $t_1 - 1$ объясняется существованием малого промежутка (порядка нескольких дней) медленного убывания ρ (аналогичное явление имеет место и для других финансовых инструментов (Lee, 2006)). Этот промежуток означает, что в течение нескольких дней после «обвала» индекса возможен повторный «обвал». Длина промежутка медленного убывания уменьшается с уменьшением r^* и практически равна нулю для наименьшего рассмотренного r^* для HS, но еще отлична от нуля для DJI (рис. 2).

Таблица 1

Отклонение s_e и s_p плотности ρ от экспоненциальной и степенной функции соответственно для индексов DJI и HS при фиксированной верхней границе r^* целевых событий

DJI			HS		
r^*	σ_p	σ_e	r^*	σ_p	σ_e
0,007	0,22	0,28	0,011	0,46	0,35
0,009	0,51	0,38	0,05	0,69	0,41
0,011	0,91	0,61	0,017	0,73	0,53

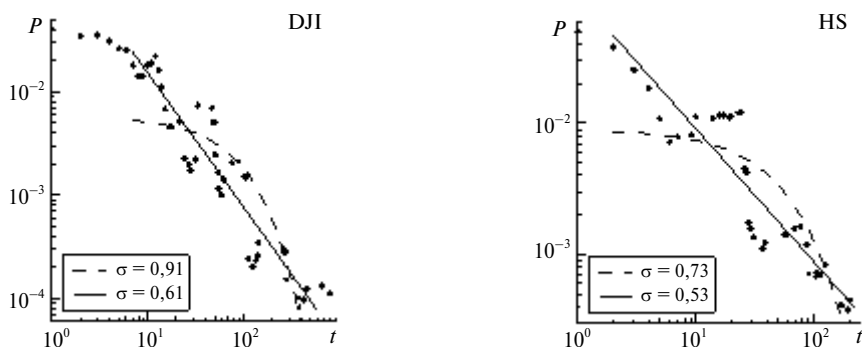


Рис. 2. Распределение времени между крупными скачками лог-доходностей для индексов DJI (слева, $r^* = -0,011$) и HS (справа, $r^* = -0,017$)

В легенде — отклонения от экспоненциального и степенного наилучшего приближения, показанного на графике пунктиром и сплошной линией соответственно.

Наибольшее рассматриваемое r^* для обоих индексов примерно равно r_{1-} (напомним, в r_{1-} происходит переход от экспоненциального убывания к степенному в левой части РВЦС). Наименьшее r^* соответствует исключительно редким (и крупным!) «обвалам» (около одного процента лог-доходностей). Видно, что отклонение от показательного распределения увеличивается с уменьшением r^* и становится существенным для наименьших r^* . Именно эти r^* выбраны при построении рис. 2.

Следуя идеям (Lee, 2006; Raberto 2002; Kaizoji, Kaizoji, 2004), вычислено отклонение

$$\sigma_p = \min_{f_p} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\log \rho(t_i) - \log f_p(t_i))^2 / (n-2)}$$

плотности ρ от наилучшей степенной аппроксимации f_p на промежутке $[t_1, t_2]$ относительно быстрого убывания. Степенное приближение оказывается точнее экспоненциального для всех рассмотренных r^* . Однако с уменьшением r^* , видимо, наблюдается не столько согласие со степенным распределением, сколько появление характерных времен между «обвалами» (пики на рис. 2).

Проведенный анализ показывает, что крупнейшие колебания цены индексов в отличие от меньших колебаний обладают определенной памятью. Причины этого феномена остаются открытыми. В частности малое количество имеющихся данных не позволяет проверить, принадлежат ли крупнейшие колебания цены индексов степенному участку распределения лог-доходностей.

Естественно, из отклонения функции ρ от экспоненты следует, что время ожидания следующего кризиса не распределено по показательному закону, лишь в предположении о неизменности условий, в которых эволюционируют фондовые индексы. Поэтому вывод о существовании памяти у крупнейших «обвалов» цен требует дополнительной проверки.

4. Алгоритм прогноза

В этом разделе гипотеза о существовании памяти у последовательности крупных «обвалов» используется для их ретроспективного прогноза. Простейший алгоритм A объявляет *тревогу* непосредственно после произошедшего «обвала». Окончание тревоги происходит T дней спустя или при следующем «обвале» в зависимости от того, что произойдет раньше. Здесь T — единственный параметр алгоритма, который настраивается на учебной выборке, не пересекающейся

с выборкой, используемой для проверки алгоритма. Заметим, что если окончание тревоги произойдет через T дней после ее объявления, то очередной «обвал» окажется непредсказанным, так как он случится, когда тревога закончилась. Напротив, если очередной «обвал» имел место раньше, чем через T дней после предыдущего, то он предсказан алгоритмом A . В этом случае, по определению, объявляется новая тревога продолжительностью в T дней.

Согласно (Molchan, 1997) качество алгоритма прогноза редких событий естественно оценивать в терминах доли n непредсказанных событий и доли τ продолжительности тревог (τ равно отношению суммарной продолжительности тревог к протяженности исследуемого интервала времени). Элементарные вычисления показывают, что для показательного РВЦС математическое ожидание суммы $n + \tau$ равно 1. Характеристики n и τ близки к двум ошибкам, возникающим при проверке статистических гипотез.

Так как показательное распределение не обладает памятью, его естественно считать полностью непредсказуемым. Таким образом, непредсказуемости соответствует сумма ошибок $n + \tau$, близкая к единице. Напротив, полная предсказуемость при нулевой продолжительности тревог имеет место для периодических событий (время между которыми постоянно). Для них достижимо равенство $n + \tau = 0$. В общем случае чем меньше $n + \tau$, тем эффективнее алгоритм прогноза.

Оценка алгоритмов прогноза редких событий в терминах n и τ применяются для алгоритмов, прогнозирующих крупные землетрясения в реальном времени (Keilis-Borok, 2003), резкий рост преступности (Кузнецов, 2006), результаты президентских и парламентских выборов (Keilis-Borok, Lichtman, 1993).

Учебная выборка, на которой настраивается алгоритм A , — это интервал 2 февраля 1956 г. — 23 декабря 1981 г. для индекса DJI и интервал 31 декабря 1986 г. — 8 октября 1997 г. для индекса HS. Зафиксированы оптимальные (в смысле $n + \tau$) значения T , равные 110 рабочих дней для DJI и 30 рабочих дней для HS. Применяя алгоритм A к индексам DJI и HS на следующих интервалах такой же длины (24 декабря 1981 г. — 7 июля 2008 г. и 9 октября 1997 г. — 7 июля 2008 г. соответственно), мы устанавливаем, что $n \approx 0,22$, $\tau \approx 0,34$ для DJI и $n \approx 0,25$, $\tau \approx 0,27$ для HS. В качестве прогнозируемых (целевых) событий выбраны крупнейшие отрицательные значения лог-доходностей. Это редкие события выборки, которые происходят в среднем один раз за несколько месяцев, табл. 2. Увеличение r^* ухудшает предсказуемость.

Таблица 2

Характеристики крупнейших событий: верхняя граница лог-доходностей r^* , соответствующие ей граница доходностей $R^* = 10^{r^*} - 1$ и вероятность $q = P\{r < r^*\}$
 $\bar{\rho}_q$ — среднее время (в годах) между «обвалами»; N — количество «обвалов», из которых N_p предсказано при доле тревог, равной τ

	r^*	R^*	q	$\bar{\rho}_q$	N	N_p	τ
DJI	0,011	0,03	0,008	0,46	54	42	0,34
HS	0,017	0,04	0,016	0,24	49	37	0,27

5. Заключение

В статье исследована последовательность крупных «обвалов» индексов DJI и HS. Отклонение распределения r этой последовательности от показательного возрастает с увеличением величины рассматриваемых «обвалов». Времена между крупнейшими «обвалами» имеют характерные значения. Положительно решен вопрос о применимости найденных свойств распределения r к построению

алгоритмов прогноза. Определен простейший алгоритм, объявляющий тревогу непосредственно после «обвала» на T дней. Если в течение этих T дней произойдет новый «обвал», то он считается предсказанным и тревога распространяется на T следующих дней. В противном случае тревога закончится до наступления нового «обвала», который окажется непредсказанным.

Качество алгоритма описано с помощью доли n непредсказанных «обвалов» и доли τ продолжительности тревог. Для DJI $n \approx 0,22$, $\tau \approx 0,34$, т. е. алгоритм прогноза предсказывает 42 события из 54, тогда как продолжительность тревог составляет около трети рассматриваемого интервала времени. Незначительно лучший результат $n \approx 0,25$, $\tau \approx 0,27$ зафиксирован для индекса HS.

Таким образом, крупнейшие «обвалы» индексов прогнозируемы в реальном времени с определенной эффективностью даже грубыми методами, игнорирующими подавляющее большинство данных. Эффективность алгоритма A , построенного в этой статье, а не случайного прогноза естественно использовать для сравнения при разработке алгоритмов прогноза кризисов.

Политические и экономические факторы, влияние которых на наступление кризисов признано статистически значимым (обзор факторов и применяемых методов в Eichengreen et. al. 1995; Krugman, 1998), видимо, могут быть использованы при построении прогнозных стратегий, т. е. правил объявления тревог. Если эти стратегии претендуют на практическое использование, то их эффективность должна быть выше, чем у алгоритма A .

Автор признателен С. Б. Измакову (Российская экономическая школа) за полезные обсуждения работы и благодарен фонду РФФИ за поддержку этого исследования (гранты 11-06-00278-а и 11-01-00887-а).

Источники

- Гельфанд И. М., Губерман Ш. А., Кейлис-Борок В. И., Кнопофф Л., Пресс Ф., Рацман Е., Ротвайн И. М., Садовский А. М.* Условия возникновения сильных землетрясений в Калифорнии и некоторых других регионах // Вычислительная сейсмология. 1976. Т. 9. С. 3–90.
- Кузнецов И. В., Родкин М. В., Серебряков Д. В., Урядов О. Б.* Иерархический подход к динамике преступности // Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение / под ред. Г. Г. Малинецкого. М., 2006.
- Магнус Я. Р., Катышев П. Л., Пересецкий А. А.* Эконометрика. Начальный курс: учебник. 7-е изд., испр. М., 2005.
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М.* Введение в эконофизику: статистические и динамические модели. Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований. 2007.
- Abhyankar, Copeland and Wong.* Uncovering Nonlinear Structure In Real-Time Stock-Market Indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100 // Journal of Business and Economic Statistics. 1997. V. 15. P. 1–14.
- Aiolfi M., Farero C. A.* Model uncertainty, thick modeling, and the predictability of stock returns // CEPR Discussion Paper. 2003. N 3997.
- Anatolyev S., Gerko A.* A trading approach to testing for predictability // Journal of Business and Economic Statistics. 2005. V. 23. P. 455–461.
- Cochrane J. H.* Asset Pricing. Princeton University Press, 2001.
- Clare A. D., Thomas S. H. and Wickens M. R.* (1994): Is the Gilt-Equity Yield Ratio Useful for Predicting UK Stock Return? // Economic Journal. 1994. V. 104. P. 303–315.
- van Dijk D., Terasvirta T. and Franses P. H.* (2002): Smooth Transition Autoregressive Models — A Survey of Recent Developments // Econometric Reviews. 2002. V. 21. P. 1–47.
- Eichengreen B., Rose, A. K. and Wyplosz Ch.* (1995): Exchange market mayhem: the antecedents and aftermath of speculative attacks // Economic Policy. 2002. V. 10. P. 249–312.
- Fama E. F. and French K. R.* Business Conditions and Expected Returns on Stocks and Bonds // Journal of Financial Economics. V. 25. P. 23–49.
- Kaizoji T., Kaizoji M.* Power law for the calm-time interval of price changes // Physica A. 2004. V. 336. P. 563–570.

Keilis-Borok V. I. Fundamentals of Earthquake Prediction: Four Paradigms // *Keilis-Borok V. I.* and *A. A. Soloviev* (eds.). Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction. Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

Keilis-Borok, V. I. and Lichtman A. J. The self-organization of American society in Presidential and Senatorial elections // *Kravtsov Yu. A.* (ed.). Limits of Predictability, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993. P. 223–238.

Krugman P. Currencies and crises. The MIT Press. 1998.

Lee J. W., Lee K. E., Rikvold P. A. Waiting-Time distribution for Korean Stock-Market Index KOSPI // *J. Korean Phys. Society.* 2006. V. 48. P. S123–S126.

Lucas A., Franses P. H. and van Dijk D. Outlier Robust Analysis of Economic Time Series. Oxford: Oxford University Press, 2002.

Malkiel B. Efficient market hypothesis. New palgrave dictionary of money and finance. London: Macmillan, 1992.

Mantegna R. N. and Stanley H. E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Molchan G. M. Earthquake Prediction as a Decision-making Problem // *Pure and Appl. Geophys.* 1997. V. 149. P. 223–247.

Pesaran M. H. and Timmermann A. A simple nonparametric test of predictive performance // *Journal of Business and Economic Statistics.* 1992. V. 10. P. 561–565.

Raberto M., Scalas E., Mainardi F. Waiting-times and returns in high-frequency financial data: an empirical study // *Physica A.* 2002. V. 314.

Silva A. C., Prange R. E. and Yakovenko V. M. Exponential distribution of financial returns at mesoscopic time lags: a new stylized fact // *Physica A.* 2004. V. 344. P. 227–235.

Rapach D. E. and Wohar M. E. Structural breaks and predictive regressions models of aggregate U.S. stock returns // *Journal of Financial Econometrics.* 2006. V. 4. 248–274.

Rockinger M. and Urga G. The evolution of stock markets in transition economies // *Journal of Comparative Economics.* 2000. V. 28. P. 456–472.

Rockinger M. and Urga G. A time varying parameter model to test for predictability and integration in the stock markets of transition economies // *Journal of Business and Economic Statistics.* 2001. V. 19. P. 73–84.

Scheinkman J. A. and Le Baron B. Nonlinear Dynamics and Stock Returns // *Journal of Business.* 1989. V. 62. P. 311–337.

Timmermann A., Granger C. W. J. (2004): Efficient market hypothesis and forecasting // *International Journal of Forecasting.* V. 20. P. 15–27.

West K. (1987): A Specification Test for Speculative Bubbles // *Quarterly Journal of Economics.* 1997. V. 102 P. 553–580.

Zalewska-Mitura A. and Hall S. G. Examining the first stages of market performance: a test for evolving market efficiency // *Economics Letters.* 1999. V. 64. P. 1–12.