ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ

В. А. Уланов
канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРОКА ПРИ ЗАМЕНЕ ПЛАТЕЖЕЙ И ИХ КОНСОЛИДАЦИИ

На практике часто возникают задачи, связанные с переоформлением финансовых соглашений на новых условиях. В частности, такого сорта задачами являются замена платежей и их консолидация. Чтобы при любых изменениях ни один из участников не имел никакого убытка, необходимо руководствоваться принципом финансовой эквивалентности, устанавливающим неизменность финансовых отношений участников до и после изменения финансового соглашения. Как известно (Четыркин, 2005, с. 76), при изменении условий выплат денежных сумм этот принцип реализуется путем составления уравнения эквивалентности, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени. Однако в случае использования простой процентной (или учетной) ставки указанный момент времени нельзя выбрать произвольным образом.

Как правило, в современных работах по финансовым вычислениям (финансовой математике) не обращают внимания читателя на ту ситуацию, что выбор момента приведения в условиях простых процентов влияет на результат[1]. Да и в иностранной литературе мы сталкиваемся с аналогичным фактом. Так, например, в известной работе (Zima, Brown, 1984) только на с. 24–25 приводятся два соответствующих примера и лишь в одном из них авторы указывают на разные ответы при выборе различных моментов приведения, никоим образом не комментируя представленные вычисления. Тем не менее представляется интересным оценить (естественно, в общем виде), насколько один ответ отличается от другого.

Примечательно, что в дореволюционной литературе такие значимые ученые, как Б. Ф. Малешевский (1844–1912)[2], И. И. Кауфман (1847–1915)[3], Н. С. Лунский (1867–1956)[4] в своих сочинениях обращали внимание на указанные выше ситуации. Осуществим краткий экскурс в историю вопроса.

---

[1] В некоторых работах такого рода ситуации выделяются. См., напр.: (Ковалев, Уланов, 2012, разд. 2.12; Уланов, 2015, разд. 1.9).

[2] Заметим, что незаурядный ученый и государственный деятель Б. Ф. Малешевский не занимался финансовыми вычислениями как таковыми в широком смысле слова, однако его основательный и объемный труд (вместе с приложением составляющий более 2000 с.), содержащий математическую теорию долгосрочных финансовых операций, явился, по мнению проф. Е. М. Четыркина, «ранней фундаментальной публикацией на русском языке, содержащей методы финансовой математики» (Кочович, 2004, с. 7).

[3] И. И. Кауфман в конце XIX в. по праву считался одним из крупнейших специалистов в области финансов, денег и кредита. Любопытно, что он считал материалы Малешевского доступными лишь читателям с отличной математической подготовкой, поэтому по поручению Центрального статистического комитета Кауфман написал работу, указанную в списке литературы, в которой приемы вычислений носят, по его мнению, вспомогательный характер.

[4] Расцвет в развитии теории и практики финансовых и коммерческих вычислений в дореволюционной России связан, прежде всего, с трудами замечательного финансиста, бухгалтера и математика Н. С. Лунского. Его по праву можно считать одним из родоначальников финансового менеджмента в России.

Пусть хронологически не совсем верно, но скажем вначале о Николае Севастьяновиче Лунском, который в своем сочинении отмечал, что «формулы долгосрочных финансовых операций почти исключительно основываются на формулах наращения и учета *из сложных процентов*» (курсив автора. — *В. У.*) При этом «простые проценты для $n > 1$ (срок финансовой операции. — *В. У.*) обыкновенно не употребляются, так как они приводят к противоречиям, усложняют формулы и не отвечают фактическим условиям помещения капиталов» (Лунский, 1916, с. 38). Для иллюстрации он приводит простой пример условий продажи имения с отсрочкой платежа. Первый покупатель предлагает 123 000 руб. через 10 лет, второй — 150 000 руб. через 15 лет. Естественный вопрос: чье предложение выгоднее, если при расчетах используется простая процентная ставка 5%? Приводим по формуле математического дисконтирования (Ковалев, Уланов, 2012, с. 60) обе суммы на начало первого года:

$$\frac{123\,000}{1+10\cdot 0{,}05}=82\,000\text{ руб.},\qquad \frac{150\,000}{1+15\cdot 0{,}05}=85\,714{,}29\text{ руб.}$$

Вывод: предложение второго покупателя предпочтительнее. Если же за момент приведения принять конец пятнадцатого года, то 150 000 руб. необходимо сравнить с суммой $123\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0.05) = 153\,750$ руб. То есть предложение первого покупателя выгоднее. Приходим к противоречивым утверждениям. Лунский подчеркивает, что «какой бы момент не был избран для оценки предложений по формулам сложных процентов, вывод будет один и тот же» (Лунский, 1916, с. 39).

Болеслав Фомич Малешевский и Илларион Игнатьевич Кауфман приводят более сложный пример из старинного (даже для их времени) сочинения по арифметике, автором которого является немецкий математик Христлиб фон Клаусберг (Christlieb von Clausberg) (1689–1751)[1]. Пример в изложении Малешевского и Кауфмана заключается в следующем. (Условие и расчеты в оригинале на немецком языке см. в (Clausberg, 1762, S. 1301–1303)[2].)

Вот что пишет Кауфман: «Продается некое имение, и из трех покупщиков А предлагает 18 300 рублей наличными, Б предлагает наличными 4000 рублей и ежегодно по 4000 рублей в продолжение 4 лет, а В предлагает наличными 3000 рублей и ежегодно по 3000 рублей в продолжение 6 лет. Спрашивается, какое предложение выгоднее, считая 5% на капитал?» (Кауфман, 1891, с. 314; Малешевский, 1890, с. 50)[3].

Если все предложения привести на момент заключения сделки (по терминологии Кауфмана, «найти наличную стоимость всех трех предложений»), то «стоимость предложения А выражается суммою 18300 рублей. Стоимость предложения Б будет... 18 257 руб. 48 коп. Стоимость же предложения В будет... 18 400 руб. 80 коп. Таким образом, ... всего выгоднее предложение В, за ним следует предложение А, а наименее выгодно предложение Б» (Кауфман, 1891, с. 315). Если же все платежи отнести на конец шестого года, то наращенные простыми процентами

---

[1] Малешевский называет этот пример «задачей Клаусберга» (или Кляузенберга — как у Малешевского), видимо из-за ошибки в написании фамилии у него как Klausenberg.

[2] Кауфман и Малешевский ссылаются на третье издание сочинения Клаусберга, опубликованное в 1762 г. На самом деле представленный пример был уже в первом издании книги 1732 г. и на тех же страницах. Заметим, что было и 5-е издание в 1795 г., т. е. работа была достаточно востребована, поскольку переиздавалась даже после кончины автора. Название книги можно перевести как «Показательные вычисления». Кстати, это только часть названия, оно гораздо длиннее и, как было принято в то время, по существу раскрывает содержание книги.

[3] У Малешевского формулировка этого примера несколько иными словами, не меняющими смысл примера. Надо только заметить, что российские авторы название немецкой валюты изменили на рубли, оставив те же самые числовые значения сумм.

суммы соответственно составят: для А — 23 790 руб., для Б — 24 000 руб., для В — 24 150 руб. В этом случае, хотя предложение В остается наиболее выгодным, но уже за ним следует предложение Б, а наименее выгодно предложение А.

С целью демонстрации, как более столетия тому назад излагались выводы после вычислений весьма эрудированными учеными, и чтобы чуть-чуть окунуться в атмосферу русского языка того времени, приведем полностью замечательное по живости заключение Кауфмана (оставляя его стиль и орфографию): «Само собою разумеется, что при таком разногласии первого и второго (поверочного) расчета, о каком-либо соответствии между ними и речи быть не может; напротив, они именно тем отличаются, что друг другу соответствовать и друг с другом совпадать не в состоянии, и оттого они дают сбивчивые и противоречивые результаты» (Кауфман, 1891, с. 315)[1]. Использование сложных процентов к противоречиям не приводит: какой бы момент приведения не взять, результат не изменится[2].

Кауфман полагает, что в сравнительно коротких по срокам (до полутора лет) коммерческих делах «неточность расчета выражается в незначительных неправильностях» и им можно не придавать существенного значения, предпочитая использование простых процентов «ради их большей легкости и скорости». В долгосрочных операциях неправильности сказываются «слишком чувствительным образом», и поэтому «расчеты на основании сложных процентов делаются неминуемою необходимостью» (Кауфман, 1891, с. 315).

Рассмотрим задачу замены платежей P_1, P_2, ..., P_m, выплачиваемых соответственно через время n_1, n_2, ..., n_m, одним платежом P_0 с выплатой через время n_0, причем сроки измеряются от одного момента времени и применяется простая процентная ставка, равная r (в десятичных дробях). В этом случае уравнение эквивалентности имеет вид (Ковалев, Уланов, 2012, с. 119):

$$P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k (1 + |n_0 - n_k| r)^{\operatorname{sign}(n_0 - n_k)}. \tag{1}$$

Из этого уравнения неизвестный срок n_0 консолидированного платежа далеко не всегда просто определяется . На практике этот срок (обозначим его через $\overline{n_0}$) находят из равенства так называемых современных стоимостей соответствующих платежей (Четыркин, 2005, с. 77):

$$\frac{P_0}{1+\overline{n_0} r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}, \tag{2}$$

разрешая которое относительно $\overline{n_0}$, получим

$$\overline{n_0} = \frac{1}{r}\left(\frac{P_0}{\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}} - 1 \right), \tag{3}$$

---

[1] Аналогичным образом пишет и Малешевский: «Подобные противоречия могут встретиться при разного рода операциях, если будем принимать в расчет простые проценты. В этом и заключается их неудобство, которое устранить не представляется возможным» (Малешевский, 1890, с. 51).

[2] Интересно, что Клаусберг приводит решение примера и при применении сложных процентов, показывая, что в этом случае противоречий не возникает (Clausberg, 1762, S. 1303–1304). Нельзя не поразиться и точности вычислений и аккуратности округлений, которые демонстрирует автор. Это же практически начало XVIII в. Например, сейчас, вычисляя с помощью хорошего калькулятора «наличную стоимость» предложения Б, получим с высокой точностью

$$4000 + \frac{4000}{1{,}05} + \frac{4000}{1{,}1} + \frac{4000}{1{,}15} + \frac{4000}{1{,}2} = 18\,257{,}48165$$

У автора – 18 257,48. Удивительно, но факт.

причем этой формулой можно воспользоваться, если справедливо неравенство

$$P_0 \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}.$$

Однако в условиях простых процентов может оказаться, что срок $\overline{n_0}$ не одинаково приемлем для участников соглашения. Покажем, что это так и есть для случая $m = 1$: платеж P_1 со сроком n_1 заменяется платежом P_0 со сроком n_0.

Из уравнения (1) можно получить (Ковалев, Уланов, 2012, с. 117):

$$n_0 = n_1 + \frac{\operatorname{sign}(P_0 - P_1)}{r}\left(\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\operatorname{sign}(P_0-P_1)} - 1\right), \tag{4}$$

где $P_0 \geq \frac{P_1}{1+n_1 r}$. Формула (3) при выполнении этого же неравенства и $m = 1$ примет вид:

$$\overline{n_0} = \frac{1}{r}\left(\frac{P_0}{P_1}(1+n_1 r) - 1\right). \tag{5}$$

Пусть $P_0 > P_1$, тогда из (4) следует

$$n_0 = n_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{P_0}{P_1} - 1\right). \tag{6}$$

Очевидно, $\overline{n_0} > n_0 > n_1$. Обсудим подробнее срок n_0 с точки зрения кредитора. Согласно принципу финансовой эквивалентности срок n_0 должен быть такой, что получив через время n_1 сумму P_1 и инвестировав ее под простые проценты по ставке r, кредитор через время $n_0 - n_1$ мог бы получить сумму P_0. Такой же точки зрения необходимо придерживаться и должнику. Причем отметим, что по первоначальному соглашению кредитор может рассчитывать на получение только суммы P_1 и только через время n_1 он смог бы воспользоваться этой суммой по своему усмотрению.

Выясним, какую величину $\overline{P_0}$ получил бы кредитор через время $\overline{n_0}$, если бы через время n_1 он получил P_1. Выполнив несложные алгебраические преобразования, можно убедиться, что срок $\overline{n_0}$ больше срока n_0, определяемого по (6) на величину $\frac{P_0 - P_1}{P_1} n_1$ и $\overline{P_0} = P_0 + (P_0 - P_1) n_1 r$. Следовательно, согласившись на новый срок $\overline{n_0}$ уплаты, кредитор потеряет величину $(P_0 - P_1)\, n_1 r$, которую он мог бы получить, придерживаясь первоначального соглашения. Т.е. кредитор, руководствуясь (5) или, что равносильно, (2) при $m = 1$, терпит убыток, и тем больший, чем больше P_0.

С другой стороны, должник, обязанный отдать через n_0 сумму P_0, руководствуясь (5), имеет возможность «прокрутить» ее в течение времени $\frac{P_0 - P_1}{P_1} n_1$ и получить доход $\frac{P_0(P_0 - P_1)}{P_1} n_1 r$, не предусмотренный первоначальным соглашением.

Пусть теперь $P_0 < P_1$ (и, конечно, $P_0 \geq \frac{P_1}{1+n_1 r}$), тогда из (4) следует

$$n_0 = n_1 - \frac{1}{r}\left(\frac{P_1}{P_0} - 1\right). \tag{7}$$

Очевидно, $n_0 < n_1$ и срок n_0 такой, что получив сумму P_0 и инвестировав ее под простые проценты по ставке r, кредитор через время $n_0 - n_1$ мог бы получить сумму P_1.

Можно показать, что для срока n_1, определяемого по формуле (7), справедливо $\overline{n_0} < n_0$ при условии $P_0 > \dfrac{P_1}{1+n_1 r}$. Пусть кредитор и должник согласились руководствоваться равенством (5). Тогда кредитор, получив через $\overline{n_0}$ сумму P_0 и инвестировав ее на период $\overline{n_0} - n_0$, получит (через общий срок n_0) величину

$$\overline{P_0} = P_0(1+(n_0-\overline{n_0})r) = P_0(1+\frac{P_1-P_0}{P_1}n_1 r).$$

Таким образом, кредитор через срок n_0 будет иметь дополнительно к P_0 сумму $\dfrac{P_1-P_0}{P_1}n_1 r$.

Итак, можно сделать вывод, что при замене платежей уравнение (2) определяет срок n_0, неравноценный для участников соглашения, а именно:

а) если $P_0 > P_1$, то срок (5) выгоднее, чем (6) для должника;

б) если $P_0 < P_1$, то срок (5) выгоднее, чем (6) для кредитора.

При замене платежей применяются и учетные ставки. Если платеж P_1 со сроком n_1 заменяется платежом P_0 со сроком n_0 и используется простая годовая учетная ставка d, то уравнение эквивалентности имеет вид (Ковалев, Уланов, 2012, с. 124):

$$P_0 = P_1(1-\left|n_1-n_0\right|d)^{\operatorname{sign}(n_1-n_0)}, \tag{8}$$

откуда

$$n_0 = n_1 + \frac{\operatorname{sign}(P_0-P_1)}{d}(1-\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\operatorname{sign}(P_0-P_1)}), \tag{9}$$

где $P_0 \geqslant P_1(1-n_1 d)$.

Если вместо уравнения эквивалентности использовать уравнение

$$P_0(1-\overline{n_0}d) = P_1(1-n_1 d), \tag{10}$$

из которого следует

$$\overline{n_0} = \frac{1}{d}\left(1-\frac{P_1(1-n_1 d)}{P_0}\right), \tag{11}$$

то, проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, делаем вывод, что при замене платежей уравнение (10) определяет срок, неравноценный для участников соглашения:

а) если $P_0 > P_1$, то срок (11) выгоднее, чем (9) для кредитора;

б) если $P_0 < P_1$, то срок (11) выгоднее, чем (9) для должника.

Рассмотрим теперь консолидацию платежей, при осуществлении которой для определения срока единого платежа, кроме формулы (3), используется и взвешенная сумма исходных сроков выплат:

$$n_0^* = \sum_{k=1}^{m}\frac{P_k}{P_0}n_k, \tag{12}$$

где $P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k$, т. е. весом для каждого срока n_k служит доля капитала P_k, которую он составляет от общей суммы капиталов $\sum_{k=1}^{m} P_k$, и срок n_0^* не зависит от процентной ставки.

Формулу (12) можно получить из следующих соображений. Пусть T любой большой срок, превышающий каждый из сроков $n_0^*, n_1, \ldots, n_m$. Срок n_0^* консолидированного платежа находим из равенства наращенных стоимостей:

$$P_0(1+(T-n_0^*)r) = \sum_{k=1}^{m} P_k(1+(T-n_k)r).$$

Здесь уместно заметить, что при определенных условиях значения, вычисляемые по формулам (3) и (12), приблизительно равны, т. е. $\overline{n_0} \approx n_0^*$. Действительно, пусть $\overline{n_0} r < 1$ и $n_k r < 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, разлагая в ряд $(1+\overline{n_0}r)^{-1}$ и $(1 + n_k r)^{-1}$ и ограничиваясь в каждом разложении только двумя слагаемыми из (3), получим:

$$P_0(1-\overline{n_0}r) \approx \sum_{k=1}^{m} P_k(1-n_k r),$$

откуда $\overline{n_0} \approx \dfrac{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k}{P_0}$, т. е. $\overline{n_0} \approx n_0^*$.

Т е о р е м а 1. Между сроками n_0^* и $\overline{n_0}$, определяемыми соответственно по формулам (12) и (3), справедливо неравенство:

$$n_0^* > \overline{n_0}.$$

Доказательство. Преобразуем вначале равенство (3), учитывая, что $P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k$:

$$\overline{n_0} = \frac{1}{r}\left(\frac{P_0 - \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}}{\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k n_k}{1+n_k r}}{\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}} = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k n_k}{1+n_k r}, \tag{13}$$

где для упрощения записи обозначено $\sigma = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{P_k}{1+n_k r}$. Кстати, из (13) видно, что $\overline{n_0}$ (также, как и n_0^*) является взвешенной суммой исходных сроков, где весом для каждого срока n_k служит доля приведенного на начальный момент капитала P_k, которую он составляет от общей суммы приведенных на начальный момент данных капиталов.

Вычислим разность между обсуждаемыми сроками:

$$n_0^* - \overline{n_0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k n_k}{P_0} - \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k n_k}{1+n_k r} = \frac{1}{P_0 \sigma}\sum_{k=1}^{m} P_k n_k \sum_{j=1}^{m} P_j \left(\frac{1}{1+n_j r} - \frac{1}{1+n_k r}\right) =$$

$$= \frac{1}{P_0 \sigma}\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{P_k P_j n_k (n_k - n_j) r}{(1+n_k r)(1+n_j r)}. \tag{14}$$

Очевидно, при $k = j$ соответствующее слагаемое в (14) равно нулю. Если $k \neq j$, то группируя в (14) два слагаемых с одинаковыми знаменателями, получим:

$$\frac{P_k P_j n_k (n_k - n_j) r + P_j P_k n_j (n_j - n_k) r}{(1+n_k r)(1+n_j r)} = \frac{P_k P_j (n_k - n_j)^2 r}{(1+n_k r)(1+n_j r)}.$$

В результате искомая разность примет вид:

$$n_0^* - \overline{n_0} = \frac{r}{P_0 \sigma}\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=k+1}^{m} \frac{P_k P_j (n_k - n_j)^2}{(1+n_k r)(1+n_j r)}. \tag{15}$$

Поскольку в (15) под знаком суммы все слагаемые положительны и $r > 0$, $P_0 > 0$, $\sigma > 0$, то теорема доказана.

Заметим, что в процессе доказательства получена в явном виде величина, на которую отличаются друг от друга n_0^* и $\overline{n_0}$.

Таким образом, из Теоремы 1 следует, что срок n_0^* выгоднее для должника, а срок $\overline{n_0}$ – для кредитора.

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Платежи в 20 и 30 тыс. руб. должны быть погашены соответственно через 45 и 90 дней. Кредитор и должник согласились заменить два платежа одним в 50 тыс. руб. Найти срок оплаты консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 12% и способ 360/360.

Полагаем $P_0 = 50$, $P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $n_1 = \frac{45}{360} = 0{,}125$, $n_2 = \frac{90}{360} = 0{,}25$, $r = 0{,}12$ и, пользуясь формулами (3) и (12), получаем $\overline{n_0} = 0{,}1996$ года, $n_0^* = 0{,}2$ года, т. е. $n_0^* > \overline{n_0}$. Очевидно, $\overline{n_0} \approx n_0^* \approx 72$ дня.

Можно доказать и более общее утверждение. Пусть заемщик должен выплатить одному и тому же кредитору суммы P_1, P_2, ..., P_m, соответственно через время n_1, n_2, ..., n_m, причем в течение времени n_k применяется простая процентная ставка r_k ($k = 1,2, ..., m$), и все сроки измеряются от одного момента времени. Предположим, заемщик и кредитор договорились о выплате всего долга одним платежом $P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k$ и при этом использовать простую процентную ставку $r_0 = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{P_0} r_k$. Неизвестный срок консолидированного платежа предлагается определить либо из равенства приведенных стоимостей соответствующих платежей

$$\frac{P_0}{1+\overline{n_0} r_0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r_k},$$

откуда

$$\overline{n_0} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{P_0}{\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r_k}} - 1 \right), \tag{16}$$

либо в виде взвешенной суммы:

$$n_0^* = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{P_k r_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k r_k} \right) n_k. \tag{17}$$

Теорема 2. Между сроками n_0^* и $\overline{n_0}$, определяемыми соответственно по формулам (17) и (16), справедливо соотношение:

$$n_0^* = \overline{n_0} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} P_k r_k \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r_k}} \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=k+1}^{m} \frac{P_k P_j (n_k r_k - n_j r_j)^2}{(1+n_k r_k)(1+n_j r_j)}.$$

Из Теоремы 2 следует, что $n_0^* > \overline{n_0}$. В случае же $r_1 = r_2 = ... = r_m = r$ получим: $r_0 = r$, (16) и (17) совпадают соответственно с (13) и (12) и из Теоремы 2 следует Теорема 1.

В заключение сравним между собой сроки, определяемые формулами (12) и (17).

Т е о р е м а 3. Если для любых $i, j = 1, 2, ..., m$ $(i \neq j)$ справедливо: из $n_i > n_j$ следует $r_i > r_j$ (т.е. большему сроку соответствует большая процентная ставка), то

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{P_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k}\right) n_k < \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{P_k r_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k r_k}\right) n_k.$$

Источники

Кауфман И. И. Основания расчетов по публичным займам // Временник Центрального статистического комитета. № 21. СПб., 1891.

Ковалев В. В., *Уланов В. А.* Курс финансовых вычислений. 4-е изд. М., 2012.

Кочович Е. Финансовая математика: с задачами и решениями: учеб.-метод. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М., 2004.

Лунский Н. С. Высшие финансовые вычисления. Отдел первый. М., 1916.

Малешевский Б. Ф. Теория и практика пенсионных касс. СПб., 1890. Т. 1.

Четыркин Е. М. Финансовая математика: учебник. 5-е изд., испр. М., 2005.

Уланов В. А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М., 2015.

Clausberg Ch. von. Demonstrative Rechenkunst. 3. Aufl. Leipzig, 1762.

Zima P., *Brown R. L.* Schaum's Outline of Contemporary Mathematics of Finance e. N. Y., 1984.