Н. Д. Морозкин[1]

докт. физ-мат. наук, проф., зав. кафедрой вычислительной математики Башкирского государственного университета (Уфа)

Б. Ф. Хайруллин[2]

начальник отдела информационных технологий филиала ОАО «Газпромбанк» (Уфа)

Ю. Н. Морозкин[3]

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры финансов и налогообложения Башкирского государственного университета (Уфа)

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ СУММЫ КРЕДИТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГРАФИКА ПЛАТЕЖА И ЛЬГОТНОГО ПЕРИОДА КРЕДИТОВАНИЯ

В работе выписаны оценки наибольшей суммы кредита, который может быть выдан заемщику в зависимости от его платежеспособности и от графика погашения кредита. Исследованы два способа погашения кредита: равными выплатами основного долга, наиболее часто используемый банками, и равными срочными уплатами. Оба способа рассматриваются с учетом предоставления льготного периода кредитования. Показано, что без увеличения рисков при погашении кредита равными срочными уплатами заемщику можно выдать кредит большего объема, чем в случае погашения кредита равными выплатами основного долга, при определенных условиях на срок кредитования. Показано также, что график погашения равными срочными уплатами банку более выгоден, так как суммарные выплаты, получаемые банком, больше, чем при погашении равными выплатами основного долга.

Пусть заемщик запрашивает ссуду размером S на n месяцев. Условиями договора предусмотрено предоставление льготного периода кредитования, т. е. в течение первых l месяцев заемщик выплачивает только проценты по основному долгу. Для того чтобы оценить, можно ли заемщику выдать кредит размером $S,$ требуется проанализировать его платежеспособность. Под анализом платежеспособности заемщика мы будем понимать оценку возможности заемщика своевременно погашать обязательства по запрашиваемому кредиту. Вывод о платежеспособности заемщика осуществляется на основе анализа его доходов за определенный предшествующий период с учетом расходов и текущих денежных обязательств. При этом основное выдвигаемое условие — максимальная ежемесячная срочная уплата $Y_{\max}$ не должна превышать установленной части среднемесячного заработка заемщика, рассчитанного за предшествующие t месяцев, т. е.

[1] Эл. адрес: morozkin@bashedu.ru
[2] Эл. адрес: khbulat@mail.ru
[3] Эл. адрес: jjuri@mail.ru

$$Y_{\max} = \max(Y_1, \ldots, Y_n) \leqslant \gamma(D - P_{\max}), \quad (1)$$

где $D = \frac{\sum_{j=1}^{t} D_{j\,\text{чист}}}{t}$ — чистый среднемесячный доход заемщика, рассчитанный за предшествующие t месяцев, Y_m — срочная уплата за m-й месяц, $m = \overline{1, n}$, $P_{\max}$ — максимум совокупных возможных срочных уплат в месяц по другим денежным обязательствам заемщика (например, по договорам поручительства), γ — кредитный коэффициент, определяемый политикой банка, который рассчитывается на основе чистого среднемесячного дохода заемщика и кредитной политики банка с учетом прогноза макроэкономических показателей банковской системы региона (Марданов, Морозкин, 2003), $D_{j\,\text{чист}}$ — совокупный доход заемщика за j-й месяц за минусом постоянных ежемесячных расходов.

Рассмотрим случай, когда после льготного периода кредитования продолжительностью l месяцев сумма займа погашается равными выплатами основного долга. В этом случае максимальная срочная уплата приходится на $(l + 1)$-й месяц, так как именно в этот месяц впервые выплачивается фиксированная часть основного долга, а сумма процентов начисляется на полную величину основного долга.

В каждом следующем месяце сумма процентов уменьшается за счет уменьшения остатка основного долга. Таким образом, срочная уплата $Y_{\max}$ в этом месяце вычисляется по формуле

$$Y_{\max} = \frac{S}{(n - l)} + iS, \quad (2)$$

где i — ежемесячная процентная ставка.

С учетом (2) неравенство (1) можно переписать в виде

$$\frac{S}{(n - l)} + iS \leqslant \gamma(D - P_{\max})$$

или

$$S \leqslant S^1_{\max}, \quad (3)$$

где

$$S^1_{\max} = \frac{1}{1 + i(n - l)} \gamma(D - P_{\max})(n - l). \quad (4)$$

Таким образом, если сумма займа погашается равными выплатами основного долга и в течение первых l месяцев по условиям договора заемщик погашает только проценты, то сумма кредита, которую банк может выдать заемщику, не может превышать $S^1_{\max}$.

Отметим, что оценка (3) получена в предположении, что начиная с $(l + 1)$-го месяца все уплаты равны $Y_{\max}$. Поэтому эта оценка может быть уточнена, если учесть, что срочная уплата, равная $Y_{\max}$, приходится только на $(l + 1)$-й месяц, а в последующие месяцы уплаты уменьшаются.

Рассмотрим другой случай, когда после льготного периода кредитования сумма займа погашается равными срочными уплатами. Так же, как и в первом случае, разобьем период кредитования на два этапа: первые l месяцев — льготный период, начиная с $(l + 1)$-го месяца — период погашения кредита. Математически уплата займа равными срочными уплатами означает, что начиная с $(l + 1)$-го месяца срочные уплаты постоянны, т. е. $Y_{l+1} = Y_{l+2} = \ldots = Y_n = Y$, и вычисляются по формуле (Садовин, Бабенко, 2003):

$$Y = \frac{Si}{1-(1+i)^{-(n-l)}}\,. \tag{5}$$

Так же, как и в первом случае, $Y \leqslant \gamma(D - P_{\max})$ или

$$S\frac{i}{1-(1+i)^{-(n-l)}} \leqslant \gamma(D - P_{\max}).$$

Значит,

$$S \leqslant S^2_{\max}, \tag{6}$$

где

$$S^2_{\max} = \frac{1-(1+i)^{-(n-l)}}{i}\gamma(D - P_{\max}). \tag{7}$$

Покажем, что если кредит взят на период $(n - l) \geqslant 2$, то в случае погашения кредита равными срочными уплатами при тех же условиях заемщику можно выдать кредит большего объема, чем в случае погашения кредита равными выплатами основного долга, т. е.

$$S^1_{\max} < S^2_{\max}. \tag{8}$$

Для этого достаточно показать, что разность

$$\frac{1}{1+i(n-l)} - \frac{1-(1+i)^{-(n-l)}}{i(n-l)} < 0.$$

Действительно,

$$\frac{1}{1+i(n-l)} - \frac{1-(1+i)^{-(n-l)}}{i(n-l)} = \frac{i(n-l)-1-i(n-l)+(1+i(n-l))(1+i)^{-(n-l)}}{i(n-l)(1+i(n-l))} =$$

$$= \frac{-(1+i)^{-(n-l)}+1+i(n-l)}{i(n-l)(1+i(n-l))(1+i)^{-(n-l)}} = \frac{1+i(n-l)-(1+i)^{-(n-l)}}{i(n-l)(1+i(n-l))(1+i)^{-(n-l)}}. \tag{9}$$

Пользуясь биномом Ньютона, при $(n - l) \geqslant 2$ можно записать

$$(1+i)^{n-l} = 1 + i(n-l) + C^2_{n-l}i^2 + \ldots + C^{n-l}_{n-l}i^{n-l}.$$

Подставив полученное выражение в числитель дроби (9) получим:

$$\frac{1}{1+i(n-l)} - \frac{1-(1+i)^{-(n-l)}}{i(n-l)} =$$

$$= \frac{1+i(n-l)-1-i(n-l)-C^2_{n-l}i^2 - \ldots - C^{n-l}_{n-l}i^{n-l}}{i(n-l)(1+i(n-l))(1+i)^{n-l}} =$$

$$= -\frac{C^2_{n-l}i^2 + \ldots + C^{n-l}_{n-l}i^{n-l}}{i(n-l)(1+i(n-l))(1+i)^{n-l}} < 0,$$

поскольку при $i > 0$ и $(n - l) \geqslant 2$ и числитель, и знаменатель дроби — положительны. Неравенство (8) доказано.

Таким образом, если заемщику предложить погашать кредит равными срочными уплатами, то без увеличения рисков заемщику можно выдать кредит большего объема, чем при погашении кредита равными выплатами основного долга.

Покажем, что если $(n - l) \geqslant 3$, то при одном и том же объеме кредита его погашение равными срочными уплатами банку более выгодно, чем погашение равными выплатами основного долга, так как сумма денежных средств, получаемая банком с учетом погашения заемщиком основного долга и начисленных процентов, будет больше.

Так как при погашении займа равными срочными уплатами ежемесячные выплаты одинаковы и в соответствии с формулой (5) равны $\frac{Si}{1-(1+i)^{-(n-l)}}$, то за $n-l$ месяцев банк получит сумму $B_1 = \frac{(n-l)Si}{1-(1+i)^{-(n-l)}}$.

Введя обозначения $k = n - l$, можно записать:

$$B_1 = \frac{kSi}{1-(1+i)^{-k}} \tag{10}$$

При погашении займа равными выплатами основного долга величина срочной уплаты в m-м месяце вычисляется по формуле:

$$Y_m = \left(S - \frac{S}{k}(m-1)\right)i + \frac{S}{k}, \quad m = \overline{1, k}, \quad k = n - l.$$

За k месяцев банку будет выплачена сумма

$$B_2 = \sum_{m=1}^{k}\left[\left(S - \frac{S}{k}(m-1)\right)i + \frac{S}{k}\right] = kiS + S - \frac{Si}{k}\sum_{m=1}^{k}(m-1) =$$

$$= kiS + S - \frac{Si(k-1)}{2} = \frac{1}{2}kiS + \frac{1}{2}iS + S.$$

Составим разность $B_1 - B_2$ и покажем, что при $k \geqslant 3$ справедливо неравенство $B_1 - B_2 > 0$.

Действительно,

$$B_1 - B_2 = \frac{kSi}{1-(1+i)^{-k}} - \frac{1}{2}(kiS + iS + 2S) =$$

$$= \frac{S[2ki(1+i)^k - ((1+i)^k - i)(ki + i + 2)]}{2((1+i)^k - 1)}.$$

Достаточно показать, что

$$2ki(1+i)^k - ((1+i)^k - i)(ki + i + 2) > 0, \tag{11}$$

поскольку знаменатель дроби — положительная величина.

Пользуясь формулой бинома Ньютона, можно написать:

$$(1+i)^k - 1 = 1 + \sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m - 1 = \sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m.$$

Следовательно:

$$2ki(1+i)^k - ((1+i)^k - i)(ki + i + 2) = 2ki + 2k\sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m - (ki + i + 2)\sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m =$$

$$= 2ki + 2k\sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m - (ki + i)\sum_{m=1}^{k} C_k^m i^m - 2ki - 2\sum_{m=2}^{k} C_k^m i^m =$$

$$= (k-1)\sum_{m=1}^{k} C_k^m i^{m+1} - 2\sum_{m=2}^{k} C_k^m i^m =$$

$$= (k-1)i^{k+1} + \sum_{m=2}^{k-1} \frac{i^m k!}{(k-m+1)!(m-1)!}\left[k - 1 - \frac{2}{m(k-m)}\right] + [k(k-1) - 2]i^k.$$

Поскольку при $k \geqslant 3$ все три слагаемые положительны, то $B_1 - B_2 > 0$, что и требовалось доказать.

Вычислительный эксперимент

Предположим, что чистый среднемесячный доход заемщика $D = 50\,000$ руб. У заемщика отсутствуют денежные обязательства на момент предоставления кредита, поэтому $P_{\max} = 0$. В текущей макроэкономической ситуации прогноз основных показателей баланса кредитных организаций региона демонстрирует замедление темпов роста. Кредитный коэффициент γ вычисляется в соответствии с результатом работы Ю. Н. Морозкина (Морозкин, 2007) и равен 0,315.

Заемщик собирается взять кредит на 36 месяцев. Допустим, кредит может быть выдан банком под 1,5% в месяц, что составляет 18% годовых. Пусть заемщик считается добросовестным и может воспользоваться шестимесячным льготным периодом кредитования. По условиям договора, в течение льготного периода кредитования заемщик гасит только начисленные проценты. По завершении льготного периода основной долг погашается равными выплатами основного долга.

Рассчитаем максимальную сумму кредита $S^1_{\max}$ по формуле (4):

$$S^1_{\max} = \frac{1}{1 + 0{,}015 \times 30} \times (0{,}315 \times 50000 \times 30) \approx 325836.$$

Теперь допустим, что кредитный договор предусматривает погашение займа после завершения льготного периода кредитования равными ежемесячными срочными уплатами. Тогда максимальную сумму выдаваемого кредита можно рассчитать по формуле (7):

$$S_{\max} = \frac{1 - (1 + 0{,}015)^{-30}}{0{,}015} \times (0{,}315 \times 50000) \approx 378000.$$

Таким образом, расчет максимально допустимой суммы кредита показал, что этому же клиенту без увеличения риска банк может выдать ссуду на 13,8% больше, чем в первом случае. И с этой же точки зрения заемщику выгоднее взять кредит, который будет погашен равными срочными уплатами.

Допустим, банк выдал кредит заемщику в размере $S = 320\,000$ руб. Пусть заемщик погашает кредит равными выплатами основного долга. Тогда схему погашения кредита можно представить в виде табл. 1.

Теперь допустим, кредитный договор предусматривает погашение займа равными ежемесячными срочными уплатами. Ежемесячные уплаты Y в этом случае

Таблица 1

График погашения равными выплатами основного долга с льготным периодом 6 месяцев

№ п/п	Остаток задолженности (D_k)	Процентная ставка	Сумма по процентам (I_k)	Сумма основного долга (R_k)	Сумма к уплате (Y_k)
1	320000	18	4800	0	4800
2	320000	18	4800	0	4800
...	...	...	...	...	...
7	320000	18	4800	10667	15467
...	...	...	...	...	...
24	138661	18	2080	10667	12747
...	...	...	...	...	...
36	10657	18	160	10657	10817
Итого:			103200	320000	423210

вычисляются по формуле (5). Величина процентных платежей начиная с 7-го месяца — по формуле (Садовин, Бабенко, 2003) $I_k = Y(1 - (1 + i)^{k-30})$, а сумма основного долга по формуле $R_k = Y(1 + i)^{k-30}$.

График погашения займа представлен в табл. 2.

Таблица 2

График погашения равными срочными уплатами с льготным периодом 6 месяцев

№ п/п	Остаток задолженности (D_k)	Процентная ставка	Сумма по процентам (I_k)	Сумма основного долга (R_k)	Сумма к уплате (Y_k)
1	320000	18	4800	0	4800
2	320000	18	4800	0	4800
...	...	...	...	...	...
7	320000	18	4800	8525	13325
...	...	...	...	...	...
24	156289	18	2343	10982	13325
...	...	...	...	...	...
36	13070	18	195	13070	13265
Итого:			108490	320000	428490

В данном случае совокупные процентные платежи по кредитному договору увеличиваются на 4,9%, т. е. такой график погашения для банка выгоднее, чем погашение займа равными выплатами основного долга.

Заключение

Текущая макроэкономическая ситуация вызывает определенные затруднения у заемщика по уплате платежей по кредитному договору в первые месяцы после получения займа. Применение льготного периода кредитования с отсрочкой платежа по основному долгу позволяет уменьшить в первые месяцы сумму уплат заемщика по договору. При этом, как показывают результаты настоящей работы, наиболее часто предлагаемый банками способ погашения основного долга равными долями не всегда является удобным для заемщика, поскольку выплаты сильно различаются по периодам, а максимальный размер кредита меньше по сравнению с аннуитетными платежами. Кроме того, график погашения кредита равными срочными уплатами более выгоден и банку, поскольку позволяет не только увеличить сумму займа для заемщика без увеличения рисков, но и получить более высокий процентный доход от выдаваемого кредита.

Источники

Марданов Р. Х., Морозкин Ю. Н. Моделирование и прогнозирование основных показателей банковской системы региона // Труды Средневолжского математического общества. Саранск, 2003. Т. 5. № 1. С. 353—362.

Морозкин Ю. Н. Применение математического моделирования в задачах оптимизации процессов кредитования / Препринт № 100. Саранск, 2007.

Пещанская И. В. Финансовые коэффициенты в системе оценки кредитоспособности заемщиков банками // Экономический анализ: теория и практика. 2004. № 2. С. 52—56.

Садовин Н. С., Бабенко Т. М. Количественные методы анализа финансово-кредитных операций. Иошкар-Ола, 2003.