ИСТОРИЯ ФИНАНСОВ И УЧЕТА

К. Виттих (Женева), Г. Раушер (Вена), О.Б. Шейнин (Берлин)

ПЕРЕПИСКА Е.Е. СЛУЦКОГО И В.И. БОРТКЕВИЧА

Мы публикуем сохранившиеся письма из переписки Евгения Евгеньевича Слуцкого (1880–1948) и Владислава Иосифовича Борткевича (Ladislaus von Bortkiewicz) (1868–1931), которые хранятся в Швеции, в архиве последнего (Uppsala Univ., Manuskript & Musikabteilung, Kapsel 7), недавно обнаруженного Г. Раушером. Слуцкий частично, а Борткевич полностью придерживались дореволюционной системы правописания.

Писем Слуцкого из Москвы после середины 1926 г. не осталось, быть может их и не было. Он, правда, продолжал переписку с другими западными коллегами, например с Рагнаром Фришем, см. Chipman [42].

Письма Борткевича являлись, видимо, черновиками. Их чтение затруднительно и мы не смогли разобрать некоторые слова, вместо которых указываем [?]. Кроме того, он зачеркнул многие строки, что в нескольких случаях сделало неясным смысл, а многие слова писал сокращенно. В письмах Слуцкого много подчеркиваний (которые мы выделили курсивом), притом сделанных иногда крайне небрежно, видимо, Борткевичем, и в таких случаях они подчеркнуты нами без применения курсива.

Среди многих тем Слуцкий останавливался на логической и философской сторонах статистики, и есть смысл вспомнить свидетельство Четверикова [32, с. 272]:

В середине 40-х годов Е.Е. Слуцкий даже с некоторым раздражением отказывался обсуждать чисто логические концепции, хотя и не мог пройти мимо модной в те годы критики Р. Фишером проблемы исчисления вероятности гипотез (теоремы Бейеса).

В письмах Слуцкого из Киева, а затем из Москвы он неизменно указывал свой почтовый адрес, а именно: Нестеровская, 17, кв. 8, и Машкова 17/15 (т.е. у Н.С. Четверикова, см. Письмо № 7, см. о нем Прим. 18) соответственно.

Было известно, что Борткевич переписывался со Слуцким, поскольку последний воспринял термин своего старшего коллеги (Письмо № 3), однако об их регулярной переписке сведений не было, и лишь недавно мы узнали о его переписке с М.В. Птухой и Н. С.Четвериковым [12, с. 10], см. также Прим. 25. Заметим еще, что Борткевич, прожив примерно 30 лет в Германии в XX в. (не считая примерно семи лет до 1897 г.), не порвал своих отношений с Россией [12, с. 9–12].

Вот выдержка из письма Чупрова Борткевичу от 13 февраля 1923 г. из Дрездена (там же, с. 250), которое, видимо, и обусловило переписку Борткевича со Слуцким:

На днях получил письмо от Птухи. [...] *Получил я также письмо Евг. Евг. Слуцкого из Киева же. Он побывал в Москве на стат. съезде, узнал там от Четв. мой адрес. Сообщает, между прочим, что на съезде один математик из Средней Азии* [Борткевич заметил здесь: Романовский] *прочел доклад, в котором сходными путями получает некоторые из тех результатов, что я опубликовал в Биометрике. Занятно! Хорошо было бы, если бы мог послать Сл. кое-что из твоих оттисков, в особенности Хомогенитет. Он сейчас снова вернулся к мат. стат. Курс читает и сам работает в этой области. Очень плачется на отсутствие свежей литературы. Выслать ему можно было бы через родственника его N. Wolodkewitsch, Parkstrasse 4* [?] *Berlin-Südende*[1].

Письмо № 1, Слуцкий – Борткевич. Киев, 20.7.1923

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Я получил две Ваши работы (1) Homogenität [1918]и (2) Die Variationsbreite (перв. часть) [1921] и спешу поблагодарить Вас. Присылкой вашей Вы оказали мне истинное благодеяние: я читаю здесь в Институте народного хозяйства теоретическую статистику, а Вы от М.В. Птухи знаете, какое у нас отсутствие новейшей литературы.

Хотелось бы надеяться, что, если я буду просить Вас о присылке оттисков Ваших дальнейших работ, я не слишком злоупотреблю Вашей добротой. Между прочим мне очень важно было бы иметь Вашу статью Das Laplacesche Ergänzungsglied und Eggenbergers Grenzberichtigung [1920], т.к. я очень заинтересован этой темой. Мне самому удалось недавно между прочим найти одно разложение гипергеометрического ряда по некоторым параметрам; к сожалению, не знаю ново ли оно.

Посылаю Вам оттиск моей статьи в *Вестнике Статистики*[2], примите его в знак моей благодарности и глубокого уважения от искренне преданного Вам Е. Слуцкого. 17.7.1923

P.S. Не могу отказать себе в удовольствии сообщить Вам решение маленькой задачи, на которую натолнул меня один биолог. Он спрашивал меня о вероятности случайного сопряжения одинаковых хромосом в образуемом ими кольце. Оказалось, что эта задача представляет собой изящную иллюстрацию закона малых чисел[3].

Если $2S$ элементов расположены случайно в кольцо, причем среди них имеется s пар одинаковых элементов aa, bb, ..., ll, то пусть $\Pi_{m,s}$ будет вероятность того, что m элементов случайно расположатся рядом с другими m однородными элементами, а остальные элементы будут стоять рядом с неоднородными. Тогда

$$\Pi_{m,s}=\frac{2s}{m(2s-1)}\left(\frac{2s-(m+1)}{2s-2}\Pi_{m-1,s-1}+\frac{m}{2s-2}\Pi_{m,s-1}\right) \tag{1}$$

и

$$\Pi_{m,s}=\frac{1}{(2s-1)(2s-2)}\{2[2s-(m+1)]\,\Pi_{m-1,s-1}+$$
$$\{[2s-(m+2)][2s-(m+3)]+2m\}\Pi_{m,s-1}+$$
$$2(m+1)[2s-(m+3)]\Pi_{m+1,s-1}+(m+2)(m+1)\Pi_{m+2,s-1}\}. \tag{2}$$

Каждая из этих рекурсионных [рекуррентных] формул дает возможность найти последовательно нужные вероятности исходя из $\Pi_{2,2} = {}^2/_3$, $\Pi_{1,2} = 0$, $\Pi_{0,2} = {}^1/_3$. Увеличивая же s беспредельно, находим, что в пределе

$\lim \Pi_{m,s} = \lim \Pi_{m,s-1}$ (формула 2),

$\lim \Pi_{m,s} = ({}^1/_m)\lim \Pi_{m-1,s}$ (формулы 1 и 2).

Следовательно, если $\lim \Pi_{m,s} = \Pi_m$, $s = \infty$, то

$\Pi_1 = \Pi_0$, $\Pi_2 = ({}^1/_2)\Pi_1$, $\Pi_3 = ({}^1/_{2\cdot 3})\Pi_2$ и т.д., откуда $\Pi_m = ({}^1/_{m!})e^{-1}$, –

– частный случай закона малых чисел.

Из (1) и (2) нетрудно найти и приближенные выражения для Π_m и Π_{m-1}, а затем и для Π_0, показывающие, насколько быстро выроятности подходят к своему пределу. Именно имеем

$$\Pi_{m,s} = (1/m)\{1 + [(3 - m)/2s] + [(10 - 4m)/(2s)^2] + ...\}\Pi_{m-1,s}\,, \tag{3}$$

$$\Pi_{0,s} = e^{-1} - (0{,}5518/2s) - [0{,}8124/(2s)^2] + ... \tag{4}$$

Числа еще не подвергались окончательной проверке, но вот результат для $s = 6$:

	Приближенно	Точно
$\Pi_{0,6}$	0,316	3326/10 395 = 0,320
$\Pi_{1,6}$	0,382	3948/10 395 = 0,380
$\Pi_{2,6}$	0,210	2190/10 395 = 0,211
$\Pi_{3,6}$	0,069	740/10 395 = 0,071
$\Pi_{4,6}$	0,015	165/10 395 = 0,016
$\Pi_{5,6}$	$0{,}002_3$	24/10 395 = $0{,}002_3$
$\Pi_{6,6}$	$0{,}000_2$	2/10 395 = $0{,}000_2$
	$0{,}994_5$	1

К сожалению, не знаю, не была ли уже решена и эта задача[4].
Позвольте еще раз поблагодарить Вас: Вы не в состоянии представить себе, как Вы обрадовали меня Вашей присылкой.

Глубоко уважающий Вас – Е. Слуцкий

Письмо №2, Борткевич – Слуцкий. Берлин, 31.7.1923

Многоуважаемый Евгений Евгеньевич!

Благодарю Вас очень за оттиск Вашего доклада [1922] и за письмо [№ 1] от 20-го т.м. [текущего месяца]. Я вполне с Вами согласен, что теория вероятностей как отрасль чистой математики должна строиться совершенно независимо от логических вопросов, связанных с понятием вероятности в собственном смысле, но не отрицаю, что от перемены названия можно многого ожидать. Ваша конструкция как будто примыкает к конструкции Ф.А. Ланге (*Logische Studien* [2. Aufl. Iserlohn, 1894]), который исходит из понятия разделительного суждения (Disjunktionsurteil).

Мне было приятно констатировать, что Вы отрицаете отождествление вероятности с предельной частостью. Об этом пункте Вы найдете кое-что в моей рецензии [1923] на Keynes'а *Treatise on Probability*, которую я Вам вчера выслал вместе с тремя другими оттисками. К сожалению, я вынужден просить Вас при случае вернуть мне по почте как рецензию на Keynes'а, так и статью о Laplace – Eggenberger [1920]. Variationsbreite und mittl. Fehler [1921] до известной степени может служить суррогатом 2-й части статьи Die Variationsbreite beim Gaußschen Fehlergesetz [1922] [...]. Вследствие разногласий между издателем и типографией я вовсе не получил отдельных оттисков этой статьи.

В свое время я отправил М.В. Птухе свою статью Der mittl. Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten [1918]. Сожалею, что все оттиски, кроме одного, израсходованы. Там Вы найдете в выносках на стр. 108–110 замечания принципиального характера, которые может быть представят для Вас некоторый интерес[5]. За последнее время появились 1) [E.] Czuber, *Die philosophischen Grundlagen der Wahrsch. Rechnung*. Leipzig, Teubner, 1923, 343 стр. небольшого формата и 2) F.M. Urban, *Grundlagen der Wahrsch*[*einlichkeits*]*rechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig, Teubner, 1923.

Если увидите М.В. Птуху, то поблагодарите его, пожалуйста, от меня за присылку 4 экз. его таблицы см[ертности] для Украины[6].

Ваша задача и ее решение очень занятны. Мне неизвестно, чтобы до Вас кто-нибудь ею занимался. Пока я еще не совсем разобрался в исходных формулах, не имея времени хорошенько в них вникнуть. Их соотношение и коэффициенты при $\Pi_{m-1,s-1}$ в 1-й формуле мне не вполне понятны. Формула же

$$\Pi_m = (1/m!)e^{-1}$$

получается очень просто и прямым путем. Матем. ожидание числа m равняется

$$s{\cdot}2s{\cdot}(1/2s){\cdot}[2/(2s-1)] = 2s/[2s-1)].$$

При $s = 2$ имеем $2{\cdot}\Pi_{2,2} + 1{\cdot}\Pi_{1,2} + 0{\cdot}\Pi_{0,2} = {}^4/_3$.

При $s = 6$: $0{\cdot}0.320 + 1{\cdot}0.380 + ... + 6{\cdot}0.0002 = 1.091 = {}^{12}/_{11}$,

$\lim\, [2s/(2s-1)] = 1,\ s = \infty$.

А вероятность, что редкое явление, коего мат. ож. = 1, случится m раз, и есть $(e^{-1}/m!)$.

Я думаю, что проф. Мизес не откажется напечатать статью об этой задаче, если Вы ее ему пришлете.

Искренне Вас уважающий – В. Борткевич

Прилагаю адрес Мизеса.

Письмо № 3, Слуцкий – Борткевич. Киев, 25.9.1923

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Извините, что задержался с ответом на Ваше такое любезное и сердечное письмо, но я был выше головы занят последние недели, а Вам хотелось написать не спеша. Впрочем, я и получил Ваше письмо всего недели четыре назад, возвратившись в Киев из деревни, где провел часть лета.

Не могу сказать, как я благодарен Вам за присылку Ваших статей о Лапласе – Эггенберг[ер]е, о Helmert'е, о Кэйнсе и Variationsbreite [1920; 1922; 1923; 1921] – все это для меня чрезвычайно интересно. Сейчас я уезжаю на три недели в командировку в Москву с научной целью – поработать в библиотеках, а по возвращении первым делом сделаю необходимые выписки из тех статей, которые Вы просили возвратить (Лаплас – Эггенб. и Кэйнс) и немедленно вышлю Вам.

Ваш термин *разделительное исчисление* мне очень нравится – это мне не пришло в голову, а теперь кажется таким естественным. Конечно, название вещь второстепенная, но это не значит, что неважная, недаром из-за одной іоты бывало столько событий – *имя* – великое дело, как сказал бы мистик и метафизик. Впрочем, это вероятно еще музыка будущего, хотя то преобразование исчисления вероятностей, которое мне грезилось, может быть, и не за горами, может быть, я увижу еще и под Вашим пером в печати Ваше Disjunktionsrechnung [разделительное исчисление].[7]

Относительно той задачи, что я писал Вам, я воспользуюсь с благодарностью Вашим добрым советом – послать Mises'у как только успею обработать статью для печати.

Летом я сделал 3000 испытаний, для каждой тысячи варьируя условия. Мне было любопытно узнать, влияют ли размер и форма телец, перетряхиваемых вместе и располагающихся затем в кольцо, на равновероятность всех комбинаций. Я употреблял круглую коробку с куполообразным возвышением на дне, так что мои фасолинки должны были сами собой ложиться циклически. До опыта я думал, что различия формы и величины не будут иметь значения, но оказалось, что это не совсем так. Когда я взял резко различные фасолинки: две очень маленьких круглых, две побольше совсем плоских, две еще больше продолговатых округлых и 4 почти шарообразных, то получились отклонения от теории совершенно несомненные (два эксперимента по 1000 с этим набором). Но третья тысяча, которую я проделал с фасолинками *приблизительно* одинаковой формы, хотя и отличавшимися по размерам гораздо больше друг от друга, чем те кости, с которыми проделывались эксперименты по теории вероятностей, так эта тысяча дала замечательное совпадение с теорией.

Вообще я думаю, что при моей постановке эксперимента действительно форма и величина телец должны сказываться на результатах испытаний гораздо меньше, чем при других постановках, о которых пришлось узнать. Между прочим, мне никогда не приходилось ни слышать, ни читать, чтобы для *экспериментов по теории вероятностей* употреблялись автоматические саморегистрирующие приспособления. А мне кажется, что если такие эксперименты могут иметь научный интерес, то следовало бы поставить их вне зависимости от терпения исследователя, которое искушается ими очень жестоко, как я сужу по себе.

Я трусил свою коробку и изобретал от скуки машину, которая могла бы меня заменить; мне кажется, что мне это удалось (в схематической конечно форме): машина могла бы трусить, машина могла бы считать. Для задачи Бюфона [Бюффона][8] тоже кажется нетрудно было бы устроить такой саморегистрирующий аппарат.

Что касается теории моей задачи, то я не писал вывода формул, не желая обременять Вас соображениями, которые могли бы быть Вам совершенно неинтересны. Сейчас я тоже боюсь слишком затянуть письмо, но так как Вы хотели, по-видимому, как я понял, знать, как мои формулы получены, то я рискую рассказать вкратце идею вывода (весь вывод подробно я не рискую Вам посылать т.к. это слишком длинно).

Если обозначить определенную относительную последовательность элементов как комбинацию, число всех возможных комбинаций из s пар – N_s и число тех из них, которые имеют m соединенных пар, через $N_{m/s}$, то

$$N_s = (2s - 1)!, \quad P_{m/s} = N_{m/s}/(2s - 1)!.$$

Пусть $N'_{m/s}$ – число комбинаций с участием какой-либо определенной пары в определенном порядке лежащих элементов, напр. a_1a_2 или b_2b_1 и т.д. Если мы составим полный перечень всех комбинаций с a_1a_2, потом с a_2a_1, потом с b_1b_2 и т.д., то мы получим $2sN'_{m/s}$ случаев, среди которых, как легко видеть, каждая комбинация будет встречаться m раз. Поэтому

$$N_{m/s} = (2s/m)\ N'_{m/s}.$$

Найдем $N'_{m/s}$. Каждая комбинация с a_1a_2, напр., может принадлежать только к одному из двух типов $b_1a_1a_2b_2$ или $b_1a_1a_2c_1$. В первом случае, исключив *aa*, получим комбинацию из m же соединений, а во втором – только из $m - 1$. Из каждой комбинации $s - 1$ пары с $m - 1$ соединением может получиться комбинация из s пар с m соединениями путем включения *aa* в любой промежуток, кроме промежутков между соединенными элементами, т.е. $2s - 2 - (m - 1) = 2s - (m + 1)$ способами. Из каждой же комбинации из $s - 1$ пары с m соединениями может получиться комбинация из s пар с m соединениями только путем включения *aa* в один из промежутков между соединенными элементами, т.е. m способами. След.,

$$N'_{m/s} = [2s - (m + 1)]\ N_{m-1/s-1} + mN_{m/s-1}.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу и заменив каждое N через P, напр., $N_{m/s-1}$ через $P_{m/s}(2s - 1)!$ и т.д., мы и получим первую из моих формул.

Вывод другой настолько длинен, что я не рискую его сообщать. Суть его в том, что я предполагаю, что все элементы берутся в определенном порядке, но кладутся случайно и что в кольцо уже брошена $s - 1$ пара, так что остается положить только, скажем, a_1a_2. Я рассматриваю все возможные случаи, из которых может произойти m/s: I) Имеется среди $s - 1$ пары $m - 1$ соединение; II) m; III) $m + 1$; IV) $m + 2$ соединения. В каждом из них нахожу, как должны упасть a_1 и a_2, чтобы получилось m соединений из s пар. Например, в IV случае a_1 и a_2 оба должны упасть не рядом и каждое в промежуток между двумя одинаковыми, разбив две пары и не образовав ни одной. Самый вывод затем не представляет трудности.

Простите, что был слишком пространен в сем письме и примите уверение в моей самой искренней преданности.

Глубоко уважающий Вас – Е. Слуцкий.

Письмо № 4, Слуцкий – Борткевич. Киев, 24.2.1924

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Наконец-то удалось мне отправить те две статьи (о Кэйнсе и о Лапласе – Эггенбергере), которые Вы просили вернуть. Еще раз сердечнейшим образом благодарю Вас за них, но, пожалуйста, не пеняйте на меня, что я так задержал их: раньше никак не мог отправить.

Той же заказной бандеролью я отправил вышедшие за это время свои работы: 1) О некотор. схемах корреляционной связи и т.д. [1923], [...] 2 экз. 2) О новом коэфф. средн. плотности населения [1923] (5 экз.) [...], то же по-украински – напечатано в *Известиях Всеукр. Акад. Наук*). 3) К вопросу о вычисл. дохода государства от эмиссии [1923] (1 экз.) [...].

4) Математические заметки к теории эмиссии [1923] [...], 1 экз.

Последняя работа резюмирует предпоследнюю и заканчивает ее на основании неопубликов. материала. No.3 написано по просьбе моего друга проф. Л. [Н.?] Яснопольского как приложение к его работе о денежн. обращ. в эпоху революции; мне пришлось писать ее более спешно, чем я бы хотел, и она вышла длиннее, чем надо.

С приездом М.В. Птухи из Германии повеяло живыми впечатлениями с Запада – еще несколько ниточек, восстанавливающих порванную было ткань общения. Появляются книги. Выписываем комплекты журналов за последние 10 лет. Таким образом, через несколько месяцев станем до некоторой степени европейцами.

Кэйнс меня очень заинтересовал; при чтении Вашей статьи было чрезвычайно приятно чувствовать себя солидарным с Вами. Но вот относительно одной частности: я бы не сделал Кэйнсу упрека в *überraschend engherzige Auslegung des Ausdrucks «Form» [в неожиданном маловажном истолковании выражения форма*, Bortkiewicz 1923, p. 6]). Если обозначить положение относительно числа (m) комбинаций по k из n элементов данного рода (A) через $F(m; n; k; A)$, то F будет логической функцией переменных m, n, k, A и относительно нее Вы безусловно правы. Но если придать определенные значения, скажем, трем переменным и обозначить

$$F(m_1; n_1; k_1; A) = f_1(A),\ F(m_2; n_2; k_2; A) = f_2(A),$$

то f_1 и f_2 будут различными функциями A. В таком смысле Кэйнс как будто прав.

Хочется мне побеседовать с Вами на одну тему, которая меня давно занимает, хотя я и не имею еще возможности углубиться в нее настолько, насколько это нужно.

Еще когда я писал по поводу книги Кауфмана (Статистика и математика [1915 – 1916] – в каблуковском[9] *Статистическом Вестнике*), я высказал ту мысль, что т.к. в основе всякого метода лежит какая-либо теория, то одно из двух: или статистический метод основан на приложении статистической теории, или какой-либо уже другой теорет. науки. Тогда я высказался за первую альтернативу. Теперь, вдумываясь в Ваши соображения в *Die Iterationen* [1917], я не чувствую себя поколебленным и, чем больше думаю, тем более утверждаюсь на том же.

За точку отправления позвольте взять Ваши возражения против выражений *статистическая физика* и т.п. Вы указываете (S. 4), что физики применяют наименование *статистический* к таким рассмотрениям, в которых нет и речи о *действительном* подсчете элементов. Существенно ли это? Треугольник остается треугольником и тогда, когда мы его находим и примеряем в действительности эмпирической, и тогда, когда мы его изучаем в его *действительности* сверхэмпирической. Физик занимается физикой и ставя опыт, и решая абстрактную задачу, устанавливаемую гипотетическими «положим, что даны...» (массы, силы, электроны и т.д.). Логическая суть очевидна: природа предмета (Wesen) не зависит [ни] от модальностей существования, несуществования, ни [от] того, полагаем ли мы его в суждении или допущении.

Таким образом, когда физик говорит: предположим, что даны в некотором объеме *n* молекул с такими-то скоростями и т.п., то это значит иными словами: предположим, что в данном поле наблюдения подсчет дал бы *n* единиц наблюдения с таким-то распределением по величине такого-то признака. Если действительный подсчет есть статистическая операция, то и предположенный подсчет есть статистическая операция, только именно предположенная, все равно как воображаемое убийство или кража суть убийство и кража, только именно воображаемые.

Наименование операции можно перенести на предмет изучения. Как в геометрии мы изучаем протяжения со стороны формы, отвлекаясь от материала, так и в статистике мы изучаем совокупности или множества со стороны численного состава, отвлекаясь от всего, что делает предметы подсчета принадлежащими к тому или иному роду вещей. Таким образом, предмет статистики (теоретической) – численный состав (in abstracto). Это конститутивный предмет, все прочие предметы изучения представляют его логические производные (Husserl)[10]. Совокупность изучается статистикой, т.к. численный состав есть всегда числ. состав какой-либо совокупности. Но совокупность изучается лишь со стороны ее численного состава и логических производных последнего. Численные структуры как формы соотношения численных составов частей и целого; средние различного рода, разные относительные числа, все это – логические производные основного понятия статистики, которым является не совокупность, а именно численный состав.

Подразделения теоретической статистики даются дальнейшими признаками, которые могут быть сопряжены с конститутивным и его логическими производными, оставляя неопределенной species [вид] составляющих совокупность элементов. Это будут по порядку: *порядок*, *время* и *случай*. Таким образом, мы получаем такое подразделение

Статистика[11]

1. Силлептика 2. Стохастика
1.1. Силлептика в тесном смысле 1.2. Силлептическая кинематика (?)
1.11. Гористика 1.1.2. Синтагматика

Мне неясно, не лучше ли было бы ограничить смысл термина силлептика силлептикой в узком смысле, и я не знаю, какое название придумать для силлептической кинематики (этот термин я взял как первое подвернувшееся под руку ad hoc [не обдуманное заранее]).

Против Bevölkerungssylleptik [силлептика населения] я решительно возражал бы т.к. этот термин не обладает нужной логической чистотой, разве что если Bevölkerung взять за terminus technicus [технический термин], как у английских статистиков population [население]. Но и это, кажется, нехорошо, т.к. population у них вовсе не должно иметь отношения ко времени. Подразделений стохастики я не касаюсь. От исчисления вероятностей она резко отмежевана логически, а если принять Ваше название – разделительное (или дизъюнктивное) исчисление, то и терминологически. Понятия статистич. метода, статистич. техники, прикладной статистики (населения, неподвижных звезд и т.д.) вытекают тогда с полной непринужденностью из понятия статистики как теоретич. науки, которая как таковая фундирует [обосновывает] особый метод, а вместе с рядом прикладных дисциплин – особую технику и т.д.

Что мне всего менее ясно, так это то, на чем основано разграничение между силлептикой и Mengenlehre [теория множеств]. Вы упоминаете об этом пункте как о совершенно несомненном, но я о себе, к сожалению, не могу этого сказать. Я буду Вам премного обязан, если Вы хоть намеками уясните мне немного эту сторону дела.

Еще одно соображение. Если отвергнуть мою точку зрения, тогда я буду настаивать, чтобы обыкновенную статистику (без приложения стохастич. точек зрения) назвать прикладной силлептикой. Это, кажется, будет единственным логичным отношением к терминологии. Но раз термин *статистика* оказывается выкинутым за борт, то, чтобы не ломать привычки, можно употребить его, чтобы дать общее название силлептике и стохастике. И вот мы опять пришли к тому же.

Примите уверения в глубоком уважении и преданности.

Ваш – Е. Слуцкий.

P.S. Вашим советом послать свою статью о вероятностях циклических комбинаций попарно одинаковых элементов проф. Мизесу я с благодарностью воспользуюсь. Рукопись уже совсем готова, но нужно еще немного подождать.

Письмо № 5, Слуцкий – Борткевич. Киев, 24.7.1925

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Позвольте от всей души поблагодарить Вас за присланные оттиски Zweck und Struktur einer Preisindexzahl I, II, III [1923 – 1924]. Я собираюсь летом штудировать их с большим интересом. Хотя это и не извиняет моего запоздалого отклика на Вашу любезность, но все же должен сказать, что всю эту весну и лето до последнего дня я лихорадочно проработал над довольно большой статьей по теории вероятности[12] (около 6 листов) Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte [1925]. Я получил несколько новых результатов, не говоря о том, что обработка цикла вопросов под углом зрения понятия предела в стохастическом смысле мне кажется не лишенной интереса. В отношении ст[атистического] предела, как я узнал позже, приоритет принадлежит Cantelli, но понятие ст. асимптоты кажется никем не было сформулировано.

Пусть вероятность соблюдения условия A будет $P\{A\}$. Пусть распределение вероятностей случ. переменной x есть функция некоторой независимой переменной φ. Если при любом сколь угодно малом $\acute{\varepsilon}$

$$\lim P\{|x - f(\varphi)| \leq \acute{\varepsilon}\} = 1,$$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$$

то $f(\varphi)$ будет стох. асимптотой x или

$$\mathrm{as}_B(x) = f(\varphi),\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$$

Если $f(\varphi) = C$(onst), то имеем частный случай $\lim_B(x) = C$.

(as_B = asymptota Bernoulliana, $\lim_B$ = limes Bernoullianus)[13].

Пусть имеем ряд независимых испытаний и пусть вероятность появления некоторого события будет соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ в последовательных испытаниях. Пусть

$$p_{(n)} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} p_i,$$

а число появлений события в n испытаниях пусть будет m. Тогда

$$\lim_B[(m/n) - p_{(n)}] = 0$$

или

$$\mathrm{as}_B(m/n) = p_{(n)},\ n \to \infty.$$

Пересматривая Poisson'а [1837], я нахожу, что его теорема гл. 4, №№ 94–96 выражается как раз именно означенными равенствами. Т.к. в условиях теоремы не предположено, что существует

$$\lim(1/n)\sum_{i=1}^{n} p_i, n \to \infty$$

и никаких на ряд чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ не наложено ограничений, то я принужден отказаться рассматривать эту теорему как случай средней вероятности постоянного состава[14]. Насколько я могу судить, я имел здесь несчастье разойтись с Вашим мнением, – так же, как и в истолковании общей позиции Пуассона в вопросе о законе больших чисел, – но об этом писать слишком длинно. Кроме немецкой статьи я пишу об этом, и притом с большей подробностью, в *Вестнике Статистики* (появится осенью [1925])[15], и я буду иметь удовольствие довольно скоро прислать Вам оттиски.

Хочу сообщить Вам несколько теорем (которые появятся в печати не так еще скоро). Пусть

$$g_r(x; v) = \mathrm{E}|x - v|^r \ (r \geq 0).$$

Значение v, обращающее g_r в минимум, обозначим C_r (центр. величина, Zentralwert), а вообще v я называю Bezugswert [начальное, исходное значение].

I) Если какой-либо четный момент $g_r(x; v)$, $r \geq 0$, имеет при безграничном увеличении числа испытаний (или, общее, для неограниченной последовательности значений независимой переменной $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$) твердую верхнюю границу и если x имеет стохастическую асимптоту, то все моменты порядка ниже r, центрированные около любой стох. асимптоты, стремятся к нулю:

$$\lim g_{r-б}(x; v) = 0, \ \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

(если v какая-либо стохастическая асимптота), а все центральные величины C_k $(k < r)$ будут стохастическими асимптотами. Если $r \geq 1$, то то же справедливо и для C_r (при $0 < r < 1$ не знаю).

II) Отсюда следует, что если условие

$$\lim g_r(x; C_k) = 0, \ \varphi_1, \varphi_2, \ldots \ (r > 0; \ k \leq r)$$

не соблюдается, а x имеет стох. асимптоты, то моменты высшего [более высокого] порядка чем r, должны обращаться в бесконечность.

III) Поэтому, если при $s > r$ g_s сверху ограничено, а g_r не обращается в нуль, x не может иметь стохастических асимптот (соотв. не подлежит зак. больших чисел).

Пользуясь обозначениями А.А. Чупрова[16], имеем, как известно, для средн. арифм.

$$\mu_{2(n)} = (1/n)\mu_{[2;n]} + [(n-1)/n]\mu_{[1;\,1;\,n]}.$$

Если не соблюдается условие

$$\lim\mu_{[1;\,1;\,n]} = 0, \ n \to \infty, \qquad (1)$$

то и рассеяние $x_{(n)}$ не имеет пределом нуль. Отсюда, однако (исключая случай когда x принимает только конечные значения), еще, как известно, нельзя сделать вывод, что $x_{(n)}$ не подчиняется закону больших чисел, ибо условие

$$\mathrm{E}[x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}]^2 \to 0, \ n \to \infty$$

установлено только как достаточное. Моя теорема показывает, что если

$$\mu_{4(n)} = \mathrm{E}[x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}]^4$$

ограничено сверху, для чего, как легко показать, достаточно, чтобы

$$\mu_{(4,n)} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\mu_4^{(i)}$$

имело твердую верхнюю границу, то случайная переменная

$$x_{(n)} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i'$$

не будет подчинена зак. больш. чисел (не будет иметь стох. асимптот).

Возникает, однако, вопрос, не является ли для этого уже достаточным условием, что (a) $\mu_{[2;\,n]}$ ограничено сверху и (b) Не соблюдено условие (1).

Чтобы это доказать, нужно было бы доказать в соотв. с приведенной выше теоремой, что при условиях (a) и (b) невозможно, чтобы

$$\lim \mathrm{E}|x_{(n)} - \mathrm{E}x_{(n)}|^{2-\text{б}} = 0,\ 0 < \alpha < 2,\ n \to \infty$$

хотя бы для одного какого-либо значения α, напр., для $\alpha = 1$ или для α сколь угодно малого. Но мне это не удалось.

Примите уверение в совершенном уважении и преданности.

Е. Слуцкий.

Письмо № 6, Слуцкий – Борткевич. Киев, 31.12.1925

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Приношу Вам свои извинения, что так поздно посылаю Вам мою последнюю работу (о *законе больших чисел* [1925]), но это в значит. степени зависело от посторонних обстоятельств.

Ваше письмо я прочел с душевной радостью, так как дорожу каждым редким случаем общения с Вами. В печатавшуюся тогда работу я уже не мог бы внести никаких изменений, но Вы заметьте, что я в моей критике Ваших взглядов, которую я себе позволил, опираюсь главным образом не на *Krit. Betr.*[1894–1896], а на *Iterationen* [1917], где, как мне казалось, определенная точка зрения выразилась с полной отчетливостью. В столь трудных вопросах, однако, невероятно затруднительно найти вполне подходящую формулировку, и я охотно допускаю, что от меня ускользнули известные нюансы.

Примите уверение в совершенном уважении и преданности.

Евгений Слуцкий.

Письмо № 7, Слуцкий – Борткевич. Москва, 16.5.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Ваше письмо не застало меня в Киеве и было переслано мне в Москву, куда я теперь перебрался из-за некоторых неладов с украинским языком[17]. Хочу надеяться, что Вы великодушно извините мне столь запоздалый ответ. На новом месте, в кругу новых обязанностей трудно было собраться с мыслями, потом подошли срочные работы и т.д. Я состою консультантом Конъюнктурного института, работая вместе с Н. С. Четвериковым[18], у которого временно и живу пока мне не дали еще обещанной квартиры. Кроме того, пришлось взять консультантство и в Госплане. *Преподаванием не занимаюсь.* Положение и состояние очень непривычные и ощущаются как что-то переходное, но как станется на деле, Аллах ведает.

О смерти А.А. Чупрова, поразившей нас, несмотря на то, что последнее время надежд уже почти не было, трудно и больно писать. Н.С. Четвериков сообщил Вам уже, конечно, о том, как она была пережита в нашей статистической семье и что предположено сделать. Я хоть и не имел счастья быть близким А. А., не могу забыть утонченной деликатности его и всегдашней готовности оказать помощь в научной работе. С самой теплой благодарностью вспоминается мне его отношение к моей работе Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte [1925], которую я послал ему в 1923 г. в первом совсем кратком эскизе, спрашивая его совета насчет опубликования, т.к. тогда я был совсем отрезан от иностр. литературы. По всей вероятности, без настойчивых советов А. А. эта работа не была бы доработана в том более полном виде, в каком она сейчас печатается. Но только теперь, просматривая письма А. А., я вижу вполне с какой бездной деликатности обходил он в своих критических замечаниях все намеки на возможные продолжения и расширения темы[19], всё, что само собой должно было напрашиваться, но чего он не хотел касаться, чтобы не подсказать мне того, к чему я сам должен был придти.

О предмете нашего разногласия я неоднократно думал за это время, особенно по поводу корректуры свой статьи в *Metron*'е [1925], которая появится в ближайшей книжке. Там в первой главе в более сжатом виде охвачен приблизительно тот круг вопросов, который обнимается статьей *О законе больших чисел* [1925] [...].

Сделать сколько-нибудь значительных изменений мне не удалось, т.к. я не имел возможности проделать новых штудий над текстом Пуассона, которые могли бы изменить мою точку зрения. По второму пункту наших с Вами несхождений, именно насчет моего понимания Вашей концепции *сред. вер. пост*[*оянного*] *состава* [см. Письмо № 5 и Прим. 14], я мог бы написать много больше, но чрезвычайно боюсь злоупотребить Вашим вниманием. Скажу только следующее. Вопрос имеет как будто две стороны. (a) В какой мере распространяется то, что было установлено Вами относительно случаев, где играет роль *ср. вер. пост. сост.*, и на те случаи, котор. я называю ср. вер. произв. состава. (b) Во-вторых, можно ли найти в самом тексте Вашей трактовки вопроса указания, что *ср. вер. произв. состава* автором принималась во внимание.

А.А. Чупров написал мне в последнем своем письме осенью, что он со мной не согласен, что он думает, что вопрос решается выражением средней квадратической. Отчасти это замечание совершенно правильно. Но оно бьет мимо моей критики, т.к. погашается пунктом (a): действительно, *ср. вер. пост. состава* в тесном смысле и *ср. вер. произв. состава* [см. Прим. 14] имеют много общего в особенности по сравнению со *ср. вер. в собств. смысле*. Дело, однако, не в этом, а в том, что, по моему убеждению, вычитать из Вашего текста *Krit. Betr.* [1894–1896] или из Вашего текста в *Iterationen* [1917], что рассматриваемый мной случай Вами предусмотрен и принят во внимание, как будто никак нельзя. Есть ряд мест и не только в *Kr. Betr.*, но и в *Iter.*, которые объективно этому противоречат. Я позволю себе отметить хотя бы следующее место:

Galt es doch fьr Poisson, ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Schema zu konstruiren, das dem wirklichen Geschehen, ndmlich dem regellosen Wandel der zufðlligen Ursachen addquat wdre. Das Schema der konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit ist aber das gerade Gegenteil davon: denn hier gehen die betreffenden Wahrscheinlichkeitswerte (p_k) in feststehenden Proportionen in den Durchschnitt ein ([SS.] 54–55).

[*Пуассон же имел в виду построить такую теоретико-вероятностную схему, которая соответствовала бы действительным событиям, а именно беспорядочным изменениям случайных причин. Схема средней вероятности постоянного состава, однако, полная противоположность этому, ибо участвующие значения вероятностей (p_k) входят здесь в среднюю в установленных соотношениях*.]

Feststehende Proportionen [установленные соотношения] ведь это же наложение какого-то ограничения на подбор значений в ряду p_1, p_2, ... Логический смысл фразы совершенно исключает мысль, что численные значения последовательных величин в ряду p_1, p_2, ... совершенно какие угодно. Ведь нельзя же говорить о feststehende Proportionen по отношению к ряду, где численные значения менялись бы без всякого правила, или, напр., по такому правилу

1/10, 1/10, ..., 1/10 (m раз); 1/2, 1/2, ..., 1/2 (m^2 раз);

1/10, 1/10, ... 1/10 (m^4 раз); 1/2, 1/2, ..., 1/2 (m^8 раз) и т.д.

И вот я позволяю себе думать, что вопрос об объективном разуме текста, о том, *что* в него объективно вложено и что может быть из него вычитано любым объективным исследователем, не оставляет никаких сомнений. Приводимое здесь место из *Iter.* мне кажется решающим.

Если я ошибаюсь и если Вы находите, что я что-нибудь упускаю из виду, то простите мне категоричность выражений. Я всегда и на письме [!] и в печати охотно признаю свою ошибку.

Посылаю Вам с той же почтой две свои работы. Одна это та, которую когда-то Вы так любезно помогли мне пристроить в журнал v. [von] Mises'а – только теперь до нее очередь дошла [1926]; другая еще из 1915 г. [1915][20]. Оттиски, посланные мне во время войны, не дошли до меня, и я только теперь достал себе пять экземпляров. Один из них посылаю Вам; в этой работе мне кажется, что мне удалось кое-что существенное прибавить после Фишера, Эджворта и Парето. Не знаю, когда мне удастся возвратиться к этим темам и удастся ли. Тем более досадно, что у меня вылеживаются рукописи почти готовые, ... но в этом-то *почти* и все дело.

Съездив на Пасхе в Киев, я привез свои оттиски и теперь имею возможность послать все что могу Е.С. Альтшулю[21], о котором Вы писали мне. Сделаю это с большим удовольствием, должен буду извиниться, что не могу послать всего.

Искренне преданный Вам – Е. Слуцкий.

Письмо № 8, Слуцкий – Борткевич. Москва, 19.5.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Я позволю себе прибавить несколько соображений к предыдущему письму т.к. мне очень хочется попытаться выяснить Вам свою мысль насколько я могу, притом оставив в стороне Пуассона и вообще всю историю вопроса.

Пусть имеется безграничная последовательность урн с вероятностями

$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Из каждой урны вынуто по одному шару, и пусть частость (relat. Häufigkeit) появления белого шара в n испытаниях будет α_n. Имеем

$E\alpha_n = (1/n)\ (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = p_{(n)}$.

Какова постановка вопроса, при которой $p_{(n)}$ будет, так сказать, идеальной нормой для α_n?

Над одними и теми же первыми n урнами ряда пусть будет произведено s серий испытаний, причем в каждой серии над каждой урной сделано по одному испытанию. Полученные частости пусть будут

$\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(s)}, \ldots$

Тогда, если позволите употребить мою символику,

$$\lim_B [(1/s)\sum_{i=1}^{s} \alpha_n^{(i)}] = p_{(n)}, s \to \infty.$$

Вот эта схема, подходящая под идею ср. вер. постоянного состава. Здесь $p_{(n)}$ есть стох. предел не для $\alpha_n^{(i)}$, а для $\sum_{i=1}^{s} \alpha_n^{(i)}$ и не при независ. переменном n, а при независ. переменном s.

А вот другая постановка эксперимента. Производится неограниченный ряд испытаний по порядку над теми же урнами. Рассматривается последовательность частостей

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_N, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots$

Рассматривая значок N как переменную величину, будем иметь

$\lim_B [\alpha_N - p_{(N)}] = 0,\ N \to \infty$?

или

$\mathrm{as}_B (\alpha_N) = p_{(N)},\ N \to \infty$.

Такая постановка эксперимента и составит тот случай, который мне кажется необходимым рассматривать особо от предыдущего как случай средней вероятности произвольного (или произвольно переменного) состава.

С тем же случаем мы встречаемся, если над нашим рядом урн произведено две безграничных серии испытаний с частностями α'_N и α''_N.

Тогда $\lim_B (\alpha'_N - \alpha''_N) = 0,\ N \to \infty$

как бы ни менялся состав урн на протяжении ряда.

Примите уверение в совершенном моем уважении и искренней преданности. Е. Слуцкий.

Письмо № 9, Борткевич – Слуцкий. Берлин, 4.6.1926

Многоуважаемый Евгений Евгеньевич!

Ваши оба письма от 16-го и от 19-го мая я получил. По вопросу о различении между ср[едней] вер[оятностью] в собств. см[ысле] и ср. вер. пост[оянного] состава я остаюсь при прежнем мнении и никаких противоречий у себя не нахожу. Ведь это различение приводится у меня в связи с вопросом о дисперсии статистического ряда и представляет интерес постольку, поскольку в первом случае мера дисперсии, т.е. сумма квадр. уклонений числа появлений [события] от его м[атематического] о[жидания] [здесь зачеркнуто: квадрат ср. кв. ошибки] = npq, а во втором

$$n\sum_{\lambda=1}^{m} g_{л}p_{л}q_{л} \ (< npq), \qquad (1)$$

где m – число *различных* значений $p_{л}$, а $g_{л}$ пропор. [?] в одном и др. ряду. Вместо (1) можно, конечно, написать

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \qquad (2)$$

где n – число испытаний. Я брал первое из этих двух выражений, чтобы подчеркнуть, что порядок, в котором вероятности p_i следуют одна за другой, безразличен. Если отдельные серии испытаний не связаны между собой никакими условиями, то ни о какой мере дисперсии речи быть не может[22].

Для того, чтобы выражение (1) или (2) было мерой дисперсии, необходимо, чтобы одна серия почти воспроизводила другую в отношении состава. Если мы, наоборот [напротив], имеем N испытаний, которым соответствуют ничем между собой не связанные вероятности и если мы разобьем этот ряд на s серий по n испытаний ($sn = N$), то мерой дисперсии будет, конечно, не $\sqrt{p_0(1-p_0)}$ [которая] не меньше, а больше $p_0(1 - p_0)$. Но этого случая Пуассон не имеет в виду, т.к. случай неоднородной дисперсии [?] (более общего, чем случай наднорм дисперсии, который [?] Лексис в статье Über die Th. d. Stab. stat. Reihen [1879] Пуассон не имел касания). К сожалению, я должен ограничиться этими прежними замечаниями за полнейшим недостатком времени для более подробного выяснения своей точки зрения[23].

Не знаю также, когда удосужусь прочесть Вашу статью [1915] в *Giornale degli Economisti,* хотя вопрос меня интересует. Я недавно возвращался к нему, но рассматривал его в гораздо менее замысловатой чем у Вас постановке.

Я очень рад, что Вам удалось поместить одно из Ваших исследований в журнале [?] Мизеса [автора частотной теории вероятностей]. Он желал бы поместить заметку о покойном А.А. Чупрове в размере не больше одной страницы (2-х столбцов) [здесь зачеркнуто: я позволил себе указать на Вас, думая, что Вы с большим успехом сумеете] и был бы Вам за таковую весьма признателен. Надеюсь, что Вы не откажитесь и, согласно с желанием Мизеса, доставите ему рукопись в *ближайшем* будущем[24]. В *Giornale degli Ec.* напишет Bresciani[25]. С покойным А. А. меня связывала 30-тилетняя дружба и каждое свидание с ним было для меня праздником. Трудно примириться с мыслью, что его не стало. Поблаг[одарите] Четверикова[26].

[*К этому письму приложены черновые вычисления Борткевича по поводу письма Слуцкого. Они относятся к подсчетам дисперсии и в сопроводительном тексте Борткевич упомянул свою неопубликованную рукопись 1914 г.*]

Письмо № 10, Слуцкий – Борткевич. Москва, 14.6.1926

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

Сочту своим долгом написать о А.А. Чупрове для Мизеса. Я пишу ему, что статья [1926] будет готова не позднее как через две недели.

Ваши замечания к предмету нашей дискуссии прочитал с величайшим интересом, но со своей стороны не хочу больше злоупотреблять Вашим вниманием. Может быть, удастся когда-нибудь встретиться и поговорить о многом. Я очень хотел бы, чтобы это удалось.

Если все-таки дойдет как-нибудь очередь интересов и занятий Ваших до темы моей статьи в *Giornale* [1915] и Вы пробежите ее, Вы, конечно, не откажетесь черкнуть мне несколько слов. Конец статьи я теперь написал бы значительно иначе. Там еще напрашивается дополнение. Именно, для однозначности определения функции полезности (до аддитивной константы) нет надобности требовать, чтобы на каждой гиперповерхности безразличия была пара благ таких, чтобы

$$[\partial^2 U\ (x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)/\partial x_i\, \partial x_j] = 0.$$

Достаточно, чтобы можно было провести линию, пересекающую ряд гиперповерхностей безразличия, на которой какая-нибудь предельная полезность $\partial U / \partial x$ оставалась бы постоянной. А это в принципе всегда возможно. К этому результату можно придти и путем элементарных соображений, как я делаю в одной еще ненапечатанной рукописи, где разбираю весь вопрос об измеримости вообще и специально об измеримости так наз. *субъективной* ценности[27]. К сожалению, очередь работ никак не подводит еще к окончательной ее обработке.

Вашу статью я уже прочел с живейшим интересом по экземпляру Ник. Серг. Четверикова. Мой экземпляр еще не дошел до меня, но, конечно, дойдет, и я сердечно благодарю Вас за присылку.

Преданный Вам – Евгений Слуцкий.

Письмо № 11, Слуцкий – Борткевич. Франкфурт/Майн, 29.9.1928

Глубокоуважаемый Владислав Иосифович!

После конгресса в Болонье[28], совершив маленькую поездку по Италии, я приехал в Германию, чтобы провести здесь недели 3. Во Франкфурте я узнал, что я могу, – если Вы не сочтете это нескромностью, – от всей души поздравить Вас с 60-м днем рождения и принести Вам самые лучшие пожелания. Я был бы очень рад если бы Вы позволили мне навестить Вас когда я приеду в Берлин, что случится, как я думаю, в середине следующей недели: в среду или четверг (3 или 4 октября). Встретиться лично с Вами для меня было бы большой радостью.

Глубоко уважающий Вас и искренне преданный Вам –

Евгений Слуцкий.

Примечания

1. Михаил Васильевич Птуха (1884–1961), демограф и историк статистики; о Четверикове см. Прим. 18. Николай Николаевич Володкевич, Nikolaus Wolodkewitsch, род. 1888, был братом жены Слуцкого, Юлии Николаевны. Он остался в Германии, где стал в 1932 г. доктором физики в Техническом университете Дармштадта и работал затем в области технологии пищевых товаров и их контролирования (в 1930-е гг. – какое-то время в Турции). Публиковал работы на немецком языке по крайней мере до 1959 г.

2. В 1923 г. Слуцкий опубликовал в этом журнале две статьи и в следующем году послал Борткевичу оттиски их обеих (Письмо № 4), но в данном случае, несомненно, имел в виду свою статью (доклад) 1922 г. [14], см. Письмо № 2.

3. Позже Слуцкий [22] опубликовал решение этой задачи, которую он обсуждал и в Письме № 2. Бывший тогда модным *закон малых чисел* совпадает с распределением Пуассона.

4. В своей опубликованной статье [22, с. 150 прим.] Слуцкий называет того биолога, который подтолкнул его к решению описанной задачи. Им был М.В. Чернояров, впервые же, как предположил Слуцкий, эту задачу поставил С. Навашин, но его решение в «Известиях Российской академии наук» 1912 г. он, однако, подверг обоснованному сомнению. Формулы Слуцкого из его письма Борткевичу повторены в статье [22], однако формула (3), см. там формулу (16) на с. 153, оказалась ошибочной. Таблица Слуцкого повторена в статье на той же странице с несущественными исправлениями.

Виленкин [28, с. 165 – 169] решил частный случай этой задачи для $m = 0$. После простых вычислений его ответ при $s = 6$ приводится к совпадению с таблицей Слуцкого.

5. Эти замечания уточняли смысл равновозможных благоприятных шансов. В одном из них Борткевич указал, что «равномерная» случайность может не иметь места при извлечении билетиков из урны с возвращением.

6. Мы можем только упомянуть работу [31].

7. См. Слуцкий [15, с. 20], который применил этот термин со ссылкой на Борткевича.

8. Знаменитая задача (бюффонова игла) 1777 г. о вероятности пересечения упавшей иглой одной из нескольких параллельных прямых, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Своей задачей Бюффон окончательно ввел в теорию вероятностей геометрические вероятности.

9. Николай Алексеевич Каблуков (1849–1919), земский статистик и редактор «Статистического вестника».

10. Эдмунд Гуссерль (1859–1938), немецкий философ и основатель философской школы феноменологии.

11. Именно Борткевич [2, с. 4–5] предложил неудачные термины *силлептика*, *гористика* и *синтагматика*, выведя их из греческого языка. Стало общеизвестно, что со ссылкой на Якоба Бернулли он также повторил введенный тем термин *стохастика*. Уже в 1685 г. Валлис употребил выражение *стохастический* (итеративный) процесс, а Prevost & Lhuillier, в 1799 г., использовали его же в теоретико-вероятностном контексте [41, с. 61, прим. 1].

12. Слуцкий почему-то употребил единственное число (*вероятности*).

13. Термин *Modo Bernoulliano* применил в 1922 г. Романовский [37, с. 50–51]. Сам Слуцкий [20, с. 2 – 3, прим. 3] упомянул Романовского в связи с выражением *стохастический предел* (см. выше). Там же, на следующих страницах, он пояснил различие между этим пределом и соответствующим понятием в анализе и сослался на не вполне ясное (как он сам отметил) замечание Пуассона. Впрочем, на указанное различие четко указал Лаплас в 1786 г. и, менее определенно, в начале гл. 3-й своей *Аналитической теории* [48, с. 386].

Слуцкий [20, с. 14] пояснил также, что принял термин *стохастическая асимптота*, поскольку соответствующее понятие напоминает об асимптоте в анализе, описывающей поведение двух функций.

14. См. Борткевич [1, с. 64]. Там же, на следующей странице, он вводит *среднюю вероятность в собственном смысле*, которая здесь упоминается в Письме № 7.

15. Немецкая и русская статьи это, очевидно, [21; 20].

16. В дальнейшем Слуцкий объяснил смысл первых двух обозначений, однако последнее из них, как читатель убедится, не нуждается в пояснении. Наша попытка найти его у Чупрова [34; 35] оказалась безуспешной.

17. Слуцкий не владел украинским языком, который был объявлен обязательным при чтении лекций на территории Украины [32, с. 268].

18. Николай Сергеевич Четвериков (1885–1973), ученик Чупрова, самый близкий к своему учителю. Опубликовал работы по сельскохозяйственной статистике и индексной теории. Четыре года (видимо, 1931–1935) был в заключении как *вредитель*, а в 1937 или 1938 гг. был снова репрессирован; во всяком случае, ему было запрещено проживать в крупных городах [27].

19. Это утверждение несколько противоречит предыдущему описанию совета Чупрова. Слуцкий [21, с. 26, Прим. 2] выразил Чупрову благодарность и публично. Там же (с. 27, Прим. 2) он с похвалой заметил, что Чупров (вопреки мнению Маркова!) принял термин *случайная величина* как «основу всего здания теоретической статистики».

20. Темой новаторской статьи Слуцкого [14] был сбалансированный бюджет потребителя. В ней он развил некоторые идеи своей неопубликованной дипломной работы 1910 г. и некоторых работ Эджуорта и Парето. Основным достижением Слуцкого было математическое доказательство того, что при определенных предпосылках реакция потребителя на изменение цены товара может быть разделена на две независимые и аддитивные составляющие – на *эффекты дохода* (связанного с уровнем потребления) и *замещения* (структуры потребления). В наши дни формулы этого разделения были названы уравнениями Слуцкого и стали неотъемлемой частью каждого экономического курса.

Появившись в Италии в годы Первой мировой войны, его исследование долгое время оставалось незамеченным; даже сам Слуцкий, как он сообщил Борткевичу, получил его оттиски (притом лишь пять) только в 1926 г. Один из этих редких экземпляров достался Борткевичу, другой Слуцкий почти в то же время послал Рагнару Фришу, норвежскому экономисту и первому (в 1969 г.) нобелевскому лауреату по экономике, с которым он переписывался в 1925–1937 гг. Этот экземпляр был недавно обнаружен в бумагах Фриша в Осло.

И Борткевич, и Фриш были пионерами математической экономики, и все-таки прошло еще 10 лет, пока заслуга Слуцкого не была окончательно признана учеными Европы и США, которые за это время переоткрыли те же результаты, частично независимо от него, и серьезно занимались дальнейшим развитием современной теории потребительского поведения и спроса. Среди них назовем сэра Джона Хикса и Генри Шульца (см. «Экономическая школа». 2005. Вып. 5).

Тем не менее первый перевод статьи Слуцкого на английский язык появился лишь в 1952 г. [25a], а первый русский перевод еще на 10 лет позднее [25b]. Об истории открытия статьи Слуцкого и ее влияния на западную экономическую литературу см. [51; 52].

Дипломная работа Слуцкого, *Теория предельной полезности*, хранится в отделе рукописей Национальной библиотеки им. В.И. Вернадского (Киев), фонд I, № 44850. Опубликован ее перевод на украинский язык (Киев, 2006). На с. 56 этого перевода выдержка из письма Слуцкого ректору Киевского коммерческого института 1919 г. свидетельствует о том, что статью [14] он написал по-английски и что редакция итальянского журнала сама перевела его на итальянский.

21. Евгений Альтшуль (Eugen S. Altschul), родом из Латвии (1887–1959). В одной из своих рецензий Чупров [36, с. 424] упомянул его мимоходом. В 1925 г. Альтшуль [11, Письмо № 199] жил в Берлине и занимался в основном «банкирством». В 1926 г. (там же, Письмо № 211) Чупров дал Альтшулю положительную устную характеристику как статистику.

Альтшуль остался в Германии после обучения в нескольких немецких городах (Фрейбург, Лейпциг, Страсбург) и получил степень доктора наук в Фрейбурге. Работал в Берлине в 1923–1926 гг. (где он, возможно, познакомился с Борткевичем) по управлению недвижимостью, в банках (см. выше замечание Чупрова) и журналистом на экономические темы. В середине 1926 г. возглавил учрежденное во Франкфурте-на-Майне *Общество по исследованию конъюнктуры* и преподавал соответствующий курс в тамошнем университете. Вполне возможно, что Слуцкого попросили рассказать Обществу о работе Московского конъюнктурного института. После 1933 г. Альтшуль был уволен и уехал в Англию, где экономист и последователь Кейнса – Уильям Беверидж помог ему устроиться научным работником в Лондонскую школу экономики. Переехав в США, он работал там до 1939 г. в Национальном бюро экономических исследований. Экономист и статистик Уэсли Митчелл, чью книгу *Business Cycles* Альтшуль перевел в 1931 г. на немецкий, помог ему на первых порах. Затем Альтшуль преподавал в нескольких университетах, в том числе в г. Канзас, штат Миссури, где и умер [45, т. 1, с. 4–7].

22. Более точно npq является дисперсией не «статистического ряда», а количества появлений в нем исследуемого случайного события, имеющего постоянную вероятность появления в единичном испытании p при $q = 1 - p$ и числе независимых испытаний, равном n. Термин *дисперсия* в современном смысле, как заметил Дейвид [43, с. 227], ввел (на английском языке) Фишер [44, с. 399]. Возможно, что в русском языке Борткевич употребил его одним из первых.

Предмет этой части письма Борткевич обсуждал не только в 1894–1896 гг., но и в дальнейшем [2, § 2.2]. Слуцкий [20, с. 20] объяснил, что обозначение Борткевича $g_л$ (см. ниже) означало число случаев, при которых вероятность $p_л$ относилась к появлению изучаемого события. Сумму членов $p_л\ g_л$ Борткевич назвал средней вероятностью постоянного состава.

23. Предыдущие несколько строк (после слов *мерой дисперсии*, которые таким образом остались неприкаянными) явно зачеркнуты.

24. Мизес действительно опубликовал некролог [23].

25. Трудно сказать, почему Борткевич упомянул здесь Брешиани. В 1908 г. Брешиани (C. Bresciani, Bresciani-Turroni) [12, Письмо № 88] возразил Джини, который отрицал закон малых чисел, а затем перевел по крайней мере одну рукопись Борткевича на ту же тему на итальянский язык (Письмо № 91), и она появилась в журнале Джини «Metron» в 1909 г. Он собирался рецензировать *Очерки по теории статистики* Чупрова (Письмо № 123 1913 г.) и помог Чупрову получить визу для поездки в Италию (Письмо № 210 1925 г.).

26. Мы можем лишь заметить, что в 1924–1927 гг. Четвериков переписывался с Борткевичем, а в сентябре 1926 г. сообщил ему [12, Прим. 178.2], что в *Вестнике статистики* «руководящее положение заняла [Мария] Смит. Выводы отсюда ясны». Иначе: наступила пора мракобесия – для журнала и для страны в целом. Черное Солнце (выражение Шолохова, придуманное им по другому поводу) взошло над Россией!

27. См. Слуцкий [24].

28. В Болонье Слуцкий участвовал в работе Конгресса математиков [32, с. 269–270]. Сенета [50, с. 30] перевел на английский язык письмо Слуцкого, которое тот написал своей жене во время работы этого Конгресса. В нем он (как и Четвериков) описал свое столкновение с Кантелли по поводу авторства усиленного закона больших чисел. Текст этого письма Четвериков передал одному из нас (О. Ш.), от кого они и попали к Сенете, см. [38].

Литература

В.И. Борткевич (L. von Bortkiewicz)

Сравнительно полную библиографию его трудов
см. [12, с. 309–314]

1. Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики (1894–1896, на нем. яз.). В книге [33, с. 55–137].
2. Die Iterationen. Berlin, 1917.
3. Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten // Jahresber. deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1918. Bd. 27. P. 71–126.
4. Homogenitдt und Stabilität in der Statistik // Skand. Aktuarietidskr. 1918. Bd. 1. P. 1–81.
5. Das Laplacesche Ergänzungsglied und Eggenbergers Grenzberichtigung zum Wahrscheinlichkeitsintegral // Arch. Math. Phys. 1920. Bd. 20. P. 37–42.
6. Variationsbreite und mittlerer Fehler // Sitzungsber. Berliner math. Ges. 1921. Bd. 21. S. 3–11.
7. Die Variationsbreite beim Gaußschen Fehlergesetz // Nord. Statistisk Tidskr. 1922. Bd. 1. P. 193–220.
8. Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler // Z. f. angew. Math. u. Mech. 1923. Bd. 2. P. 358–375.
9. Wahrscheinlichkeit und statistische Forschung nach Keynes // Nord. Statistisk Tidskr. 1923. Bd. 2. S. 1–23.
10. Zweck und Struktur einer Preisindexzahl // P. 369–408. 1924. bd. 3. S. 208–251 и 494–516.
11. A.A. Tchuproff // 1926. bd. 5. P. 163–166. На шведск. яз. Английский перевод в книге: *Chuprov A.* Statistical Papers and Memorial Publications. Berlin, 2004. P. 178–181. Также www.sheynin.de
12. В.И. Борткевич, А.А. Чупров // Переписка 1895–1926. Берлин, 2005. Также: www.sheynin.de

Е.Е. Слуцкий, E.E. Slutsky

Почти полную библиографию его работ
см. в его биографии [32, с. 261–281] и в Избранных трудах [26].

13. Статистика и математика // Статистич. вестник. 1915–1916. № 3/4. С. 1–17. Рецензия на книгу [29].
14. Sulla teoria del bilancio del consumatore // Giornale degli Econ. 1915. T. 51. P. 1–26. Переведено на английский язык в книге [25, с. 27–56].
15. К вопросу о логических основах исчисления вероятностей // Вестник статистики. 1922. Также в книге [26, с. 18–24].
16. О некоторых схемах корреляционной связи и о систематической ошибке эмпирического коэффициента корреляции // Вестник статистики. 1923. № 1–3. С. 31–50.
17. О новом коэффициенте средней плотности населения // Вестник статистики. 1923. № 4–6. С. 5–19. Также на украинск. яз. // Записки социально-економич. виддилу Украинск. акад. наук. 1923. Т. 1. С. 138–150.
18. К вопросу о вычислении дохода государства от эмиссии // Местное хозяйство. Киев. 1923. № 2. С. 39–62.
19. Математические заметки к теории эмиссии // Экономич. бюллютень Конъюнктурного института. 1923. № 11–12. С. 53–60.
20. К вопросу о законе больших чисел // Вестник статистики. 1925. № 7/9. С. 1–55.

21. О стохастических асимптотах и предельных значениях (1925, на нем. яз.). В книге [26, с. 25–90].

22. Über die zufällige zyklische Anordnung paarweise gleicher Elemente // Z. f. angew. Math. u. Mech. 1926. Bd. 6. P. 150–159.

23. Al. A. Tschuprow [Некролог] // Jbid. P. 337–338.

24. A critique of Böhm-Bawerk's concept of value and his theory of the measurability of value (1927, на нем. яз.) // Structural Change and Econ. Dynamics. 2004. Vol. 15. P. 357–369. См. также [42].

25a. On the theory of the budget of the consumer. В книге Readings in Price Theory. / Ed. by G.J. Stigler, K.T. Boulding. Homewood, Ill., 1952.

25b. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Экономико-математические методы. М., 1963. С. 241–270. (Комментарии А.А. Конюса и В.А. Волконского: с. 270–276).

26. Избранные труды. М., 1960. (Комментарии Б.В. Гнеденко).

Другие авторы

27. *Аноним***.** Юбилеи и годовщины // Вопросы статистики. 1995. № 11. С. 77.

28. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М., 1969.

29. *Кауфман А.А. Теория и методы статистики. М., 1912.*

30. *Лексис В.* О теории стабильности статистических рядов (1879, на нем. яз.). В книге [33, с. 5–38].

31. *Птуха М.В.* Смертность в России и на Украине. Харьков; Киев, 1928.

32. *Четвериков Н.С.* Жизнь и научная деятельность Е.Е. Слуцкого // Четвериков Н.С. Статистические исследования. М., 1975. С. 261–281.

33. *О теории дисперсии. М., 1968.*

34. Чупров А. А., Tschuprow A. A. К теории стабильности статистических рядов (1918–1919, на нем. яз.). В книге [33, с. 138–224].

35. *Чупров А.А., Tschuprow A.A.* On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions // Biometrika. Vol. 12. P. 140–169, 185–210; Vol. 13. P. 283–295.

36. *Чупров А.А., Tschuprow A.A.* Учебники статистики (1922, на нем. яз.) // Чупров А.А. Вопросы статистики. М., 1960, с. 413–429.

37. *Шейнин О.Б., Чупров А.А.* Жизнь, творчество, переписка. М., 1990.

38. *Chipman J. S., Lenfant J.-S.* Chuprov, Slutsky and Chetverikov: some comments // Hist. Math. 1993. Vol. 20. P. 247–254.

39. *Чипман Дж.С., Ланфон Ж.-С.* Е.Е. Слуцкий: к 50-летию со дня смерти // Историко-математич. исследования. 1999. Вып. 3 (38). С. 128–137.

40. *Chipman J. S., Lenfant J.-S.* Anderson's forgotten obituary of Bortkiewicz // Jahrbücher f. Nat.-Ökon. u. Statistik. 2001. Bd. 221. P. 226–236.

41. *Чипман Дж.С., Ланфон Ж.-С.* Теория вероятностей. Исторический очерк. Берлин, 2005.

42. *Chipman J.S.* Slutsky's praxeology and his critique of Böhm-Bawerk // Structural Change and Econ. Dynamics. 2004. Vol. 15. P. 345–356.

43. *David H. A.* First (?) occurrence of common terms in statistics and probability. // Annotated Readings in the History of Statistics. New York, 2001. P. 209–246.

44. *Fisher R. A.* The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance // Trans. Roy. Soc. Edinb. 1921. Vol. 52 P. 399–434.

45. *Hagemann H., Krohn C.-D.,* (Hrsg), Biographisches Handbuch der deutschsprachigen wirtschaftswissenschaftlichen Emigration nach 1933, bd. 1–2. München, 1999.

46. *Keynes J.M.* Treatise on Probability. Coll. Writings. Vol. 8. London, 1973.

47. *Lange F.A.* Logische Studien. Isorlohn, 1894.

48. *Molina E.C.* The theory of probability: some comments on Laplace's Théorie analytique // Bull. Amer. Math. Soc. 1930. Vol. 36. P. 369–392.

49. *Poisson S.D.* Recherches sur la probabilité des jugements. Paris, 1837.

50. *Seneta E.* On the history of the strong law of large numbers and Boole's inequality // Hist. Math. 1992. Vol. 19. P. 24–39.

51. *Чипман Дж.С., Ланфон Ж.-С.* История одной находки: как была заново открыта и интерпретирована статья Слуцкого 1915 г. // Экономическая школа, журнал-учебник. 1999. Т. 5. С. 25–49.

52. *Chipman J. S., Lenfant J.-S.* Slutsky's 1915 article: How it came to be found and interpreted // History of Political Economy. 2002. Vol. 34. N. 3. P. 553–597.