

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

П. В. Конюховский

докт. экон. наук, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

А. С. Малова

канд. экон. наук, старший преподаватель кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Введение

Слово «кризис», несомненно, входит в десятку наиболее употребляемых экономических понятий. Признавая это, одновременно нельзя не отметить неоднозначности и размытости смыслов, вкладываемых в термин «кризис» различными авторами. Как известно, в своем исходном значении «кризис» означает нижнюю точку (точку минимума) некоторого процесса, после которой происходит перелом тенденции и спад сменяется на рост. В то же время вполне привычным и обыденным стало употребление термина «кризис» в качестве синонима выражений «трудная ситуация», «тяжелый момент», «неудовлетворительное положение дел». Как правило, даже солидные ученые-экономисты, пользующиеся авторитетом в профессиональном сообществе, избегают точного очерчивания временных границ кризиса, оперируя понятиями «предкризисный период», «посткризисный период», «меры по преодолению последствий кризиса» (Глазьев, 2010; Делягин, 2009; 2010).

В схожем положении находится и понятие «экономический рост». Зачастую его используют для отражения нечто абстрактно позитивного, того, что должно было бы произойти с экономикой при реализации благоприятного сценария и, как правило, не происходит.

Научный подход к раскрытию содержания явлений, стоящих за терминами «рост», «спад», «кризис», предполагает построение моделей, отражающих количественные параметры экономической динамики. Это позволяет конструировать аргументированные объяснения причинно-следственных связей, приводящих к поочередной смене тенденций в развитии макросистем.

Отдельно следует подчеркнуть, что проблематика идентификации зон роста, спада и кризиса обладает и вполне осязаемыми прикладными аспектами. Более того, фундаментальные тренды эволюции современных макроэкономических систем свидетельствуют об усилении этих аспектов.

Достаточно наглядным и весомым аргументом в пользу данного тезиса является возрастание внимания, уделяемого как в публицистике, так и в профессио-

нальных научных источниках проблеме перегретости российского рынка потребительского кредитования. В частности, в исследованиях, проведенных «Связной Банком», приводится статистика, в соответствии с которой за 2012 г. в России доля заемщиков, имеющих более четырех кредитов, выросла с 6 до 19%. При этом средняя величина долга, приходящегося на одного заемщика, превысила 500 тыс. руб. (Россияне закредитовались и грозят себе дефолтами, 2013). Очевидно, что превышение допустимого уровня кредитования потребителей на текущем этапе может привести к крайне негативным последствиям в будущем. В процедурах решения задач оценки подобных взаимосвязей особое место занимают рекуррентные (разностные) модели, описывающие динамику экономических систем на дискретной временной сетке.

Исследования тенденций и закономерностей экономического роста в современных условиях, проводимые на уровне, адекватном объективной сложности данной проблематике, предполагают системное применение разноплановых концептуальных и методологических подходов. В настоящей статье основное внимание сосредоточено на вопросах комплексного использования аппарата линейных разностных уравнений и эконометрических моделей при изучении экономического роста.

Математические модели и методы, рассматриваемые в настоящей статье, в первую очередь ориентированы на решение задачи выявления закономерностей и механизмов взаимовлияния процессов изменения объемов кредитования (в первую очередь, потребительского) на развитие макроэкономической системы в целом и экономический рост в частности. В настоящее время, по оценкам Центробанка РФ, доля просроченных потребительских кредитов выросла на 35% по отношению к началу 2013 г. За аналогичный период банки в РФ выдали на 21,5% больше кредитов, чем в 2012 г. По оценке ректора Финансового университета при Правительстве РФ М. Эскиндарова, коммерческие банки, значительно снизив уровень финансирования промышленности, сконцентрировались на выдаче потребительских кредитов («РГ»: просроченные кредиты граждан РФ выросли на 35%, 2013). Это дает дополнительные аргументы в пользу тезиса о высокой степени актуальности исследований проблем взаимовлияния динамики сферы потребительского кредитования, финансовой системы в целом и производственного сектора.

Краткий обзор исследований по аналогичной тематике

Разумеется, подход, предлагаемый в настоящей статье, не претендует ни на приоритетность, ни, тем более, на безальтернативность. Его следует трактовать лишь как одно из возможных средств в крайне широком спектре инструментов, применяемых при изучении проблем экономического роста. Кратко перечислим работы, затрагивающие в той или иной мере схожую проблематику.

Среди исследований, вышедших в последнем десятилетии прошлого века, можно отметить (Berg, 1994). В данной статье рассматривались взаимозависимости между процессами формирования сбережений и задолженностей домохозяйств в странах Северной Европы. Основной вывод, полученный авторами, касался проблем, порожденных реформами 1980—1990-х гг., направленных на дерегулирование финансовой сферы. В частности, отмечалось негативное воздействие ошибочных решений относительно сроков и последовательности проведения мероприятий по налоговым реформам и отмене валютного контроля, повлекших увеличение долгового бремени домохозяйств.

В статье (Debelle, 2004) проведены исследования, посвященные воздействию политики по снижению процентных ставок и смягчению ограничений на уро-

вень ликвидности, проводимой в ряде стран Северной Европы, на рост задолженности домашних хозяйств. Последнее обстоятельство, в свою очередь, вело к повышению их чувствительности к изменениям процентных ставок, доходов и цен на активы.

В работе (Barba, Pivetti, 2008) на примере США был рассмотрен процесс роста задолженности домохозяйств с позиций его макроэкономических причин и последствий. Внимание авторов, в частности, было сфокусировано на проблеме противоречий, порождаемых диспропорциями между увеличением задолженности домохозяйств (потребителей), относительно невысоким уровнем заработной платы, с одной стороны, и высоким уровнем совокупного спроса, необходимого для поддержания роста, с другой. Также в данной работе поднимаются вопросы устойчивости долгосрочного замещения кредитов заработной платой.

В статье (Jappelli, Pistaferri, 2010) был рассмотрен ряд эмпирических подходов, позволяющих решать задачу оценивания чувствительности реакции сектора потребления на прогнозируемое изменение доходов.

Статья (Sufian, Nabibullah, 2009) посвящена исследованиям основных детерминант доходности китайского банковского сектора за период с 2000 по 2005 г. Полученные результаты позволяют прийти к содержательным заключениям относительно влияния на рентабельность банков (как государственных, так и акционерных) расходов, направленных на обеспечение их собственной деятельности. Это, в конечном счете, дает представления о последствиях политики, проводимой финансовым сектором, для макроэкономической системы государства в целом.

Базовая линейно-разностная трехсекторная модель макроэкономической системы

Перечисленные выше работы, так или иначе, ориентированы на исследование закономерностей воздействия на макроэкономическую динамику (рост) того или иного интегрированного экономического сектора: производства, потребления либо финансов. В настоящей статье авторами ставится задача построения модели, позволяющей описать оказываемое ими влияние как результат комплексного взаимодействия. Примененные аппаратные средства в определенном смысле являются развитием подходов, рассматривавшихся в (Конюховский, 2002).

Дадим описание математической модели, предлагаемой в качестве базы для формализованного математического представления процессов взаимодействия и взаимовлияния глобальных подсистем макроэкономической системы. В дальнейшем изложении условимся использовать применительно к ней краткое наименование — *трехсекторная модель динамики макроэкономической системы*.

В ее рамках процесс функционирования макросистемы рассматривается на дискретной временной сетке $t \in 0, 1, \dots$ Субъектами модели выступают интегрированные (глобальные) макроэкономические сектора. Им даны условные наименования: «производитель», «потребитель», «финансовая система». Состояние модели на некоторый (очередной) момент времени t определяется следующими параметрами:

- c_t — предложение производителя (в стоимостном выражении);
- x_t — объем платежеспособного спроса потребителя, обеспечиваемого его собственными средствами;
- b_t — ресурсы, предоставляемые потребителю финансовой системой.

Нельзя не признать, что спорным качеством исследуемой далее модели является невключение в состав ее субъектов государства, экономическая роль которого в современных условиях неуклонно возрастает. Разумеется, фундаменталь-

ными причинами данного решения в первую очередь являются объективные ограничения на допустимый уровень сложности математических конструкций, которыми мы предполагаем оперировать. Иными словами, уровень сложности должен быть таковым, чтобы у нас сохранялась возможность получения конструктивных аналитических результатов. В то же время определенным оправданием для принятия данной, к сожалению, существенно обедняющей реальную картину предпосылки может служить довод об относительной пассивности государственной политики в отношении сектора потребительского кредитования. В частности, вопрос о мерах по фиксированию максимально возможной процентной ставки по потребительскому кредиту на момент написания данного текста продолжал находиться в правительстве на стадии обсуждения (ЦБ хочет ограничить ставки по кредитам для граждан, 2013; Дума не стала ограничивать ставки по потребкредитам, 2013). Одновременно следует согласиться и с очевидной необходимостью совершенствования предлагаемой модели в направлении отражения в ней воздействий, оказываемых государством.

Дальнейшее развитие модели связано с вводом в нее предпосылок относительно закономерностей динамики рядов значений. На начальных этапах исследования для относительно непродолжительных временных отрезков достаточно привлекательно выглядят гипотезы о динамике собственного спроса потребителя и предложения производителя с постоянными темпами роста α и γ :

$$x_t = \alpha \cdot x_{t-1}; \quad (1)$$

$$c_t = \gamma \cdot c_{t-1}; \quad (2)$$

Важным конструктивным достоинством соотношений (1) и (2) является относительная простота процедур оценивания значений параметров α и γ , основанных на применении простейших авторегрессионных моделей. В то же время их очевидно слабым местом является сомнительность допущения о постоянстве значений α и γ . Оно ограничивает применимость модельных представлений динамики спроса и предложения (1) и (2) довольно непродолжительными периодами времени, по истечении которых необходимо корректировать оценки α и γ .

Одной из наиболее жестких и спорных предпосылок трехсекторной модели является исключение из рассмотрения непосредственных взаимосвязей между производителем и финансовой системой. Это, несомненно, ведет к серьезным искажениям реальной макроэкономической картины, однако одновременно позволяет более наглядно и прозрачно представить последствия взаимоотношений между финансовой системой и сектором потребления.

Взаимоотношения между потребителем и финансовой системой допускают возможность заимствования дополнительных средств, увеличивающих платежеспособный спрос на величину b_t . Будем полагать, что если в $(t - 1)$ -м периоде финансовый сектор предоставил потребителю заемные финансовые ресурсы в объеме b_{t-1} , то они должны быть возвращены в t -м периоде в объеме $\delta \cdot b_{t-1}$, где $\delta > 1$.

Относительно финансовой системы также введем допущение, что сумма средств, которую она может предоставить потребителю, определяется доходом, полученным в предшествующем периоде ($\delta \cdot b_{t-1}$), за вычетом средств, затрачиваемых на собственное функционирование

$$b_t = \delta \cdot b_{t-1} - \beta(t), \quad (3)$$

где функция $\beta(t)$ определяют политику финансовой системы по расходованию средств на обеспечение собственной деятельности. Подчеркнем, что в контексте трехсекторной модели величины $\beta(t)$ представляют не просто операционные

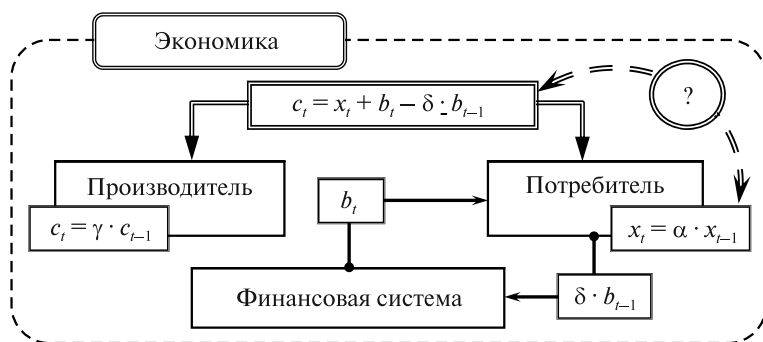


Рис. 1. Принципиальная схема трехсекторной модели динамики макроэкономической системы

издержки финансово-банковских институтов. Они олицетворяют все затраты экономической системы, которые необходимы для обеспечения деятельности финансового сектора.

Принципиальная схема взаимодействия секторов модели представлена на рис. 1. Объединяющий блок «Экономика»¹ в данной схеме отражает некоторую условную интегрирующую хозяйственную среду.

С учетом введенных обозначений и сделанных предпосылок мы можем сформулировать условие баланса спроса и предложения для трехсекторной модели в t -м периоде

$$c_t = x_t + b_t - \delta \cdot b_{t-1}, \quad (4)$$

откуда с учетом соотношения (2) получаем

$$x_t + b_t - \delta \cdot b_{t-1} = c_t = \gamma \cdot c_{t-1} = \gamma \cdot (x_{t-1} + b_{t-1} - \delta \cdot b_{t-2}) \quad (5)$$

или

$$x_t - \beta(t) = \gamma \cdot (x_{t-1} - \beta(t-1)). \quad (6)$$

Из (6) непосредственно получается представление динамики доходов потребителя в форме неоднородного линейного разностного уравнения 1-го порядка

$$x_t - \gamma \cdot x_{t-1} = \beta(t) - \gamma \cdot \beta(t-1). \quad (7)$$

Как несложно заметить, правая часть уравнения (7) в рамках предлагаемой модели определяется политикой внутренних издержек финансовой системы $\beta(t)$ и темпом роста объема предложения производителя γ , т. е. свойствами обобщенной экономической среды. Данное выражение, по существу, играет роль *управляющей функции* в линейно-разностной модели динамики. Соответственно адекватность (либо неадекватность) выбора конкретной функциональной зависимости, стоящей в правой части, предопределяет успех (либо неудачу) последующего практического использования предлагаемой математической модели.

Решение разностного уравнения (7) определяет последовательность значений объемов собственного платежеспособного спроса потребителя $\{x_t^*\}_{t=0,1,\dots}$, обеспечивающую выполнение балансового условия (4) для $t = 0, 1, \dots$

Таким образом, мы приходим к одной из фундаментальных проблем, которые могут быть сформулированы в рамках трехсекторной модели динамики макроэкономической системы, а именно к *проблеме исследования согласованности*

¹ Вполне возможно, что в данном контексте с равным основанием также могут быть применены термины «хозяйственная система» или «производственная сфера».

фактической динамики значений собственного платежеспособного спроса потребителя $\{x_t\}_{t=0,1,\dots}$ и значений $\{x_t^*\}_{t=0,1,\dots}$, при которых достигается баланс спроса и предложения в смысле условий (4).

Одним из наиболее тонких вопросов, возникающих в процессе построения и исследования моделей макроэкономического роста, является собственно определение понятия роста. Очевидно, что различные макропоказатели, вообще говоря, могут иметь разнонаправленную динамику — одни расти, другие снижаться, что, в свою очередь, приводит к неоднозначности и небесспорности выводов о росте либо об его отсутствии.

Трехсекторная модель (при условии приемлемости ее предпосылок) предлагает один из возможных подходов к разрешению данной проблемы. В ее рамках под ростом можно понимать такую позитивную динамику показателей состояния потребителя, производителя и финансовой системы, при которой выполняется балансовое соотношение (4).

Рассмотрим более подробно задачу поиска решения разностного уравнения (7), что, в свою очередь, предполагает конкретизацию вида функциональной зависимости $\beta(t)$. Принимая во внимание исходные качественные требования, которым в соответствии с вкладываемым в нее экономическим содержанием должна удовлетворять функция $\beta(t)$, определяющая политику финансовой системы по управлению объемами средств, затрачиваемых на ее функционирование (внутренние потребности), естественными кандидатами на ее конкретизацию представляются следующие функциональные зависимости:

1. $\beta(t) = \beta_0$ — постоянный уровень издержек.
2. $\beta(t) = \beta_0 \cdot (2 - e^{-\lambda t})$, $\lambda > 0$ — экспоненциальное асимптотическое приближение к уровню насыщения $2\beta_0$.
3. $\beta(t) = \lambda \cdot t + \beta_0$ — линейно-пропорциональное возрастание издержек финансовой системы во времени.
4. $\beta(t) = \beta_0 + \lambda \cdot t^\kappa$ — степенной рост издержек во времени ($\kappa \in]0, 1[$), λ — некоторый коэффициент, зависящий от используемых единиц измерения.

Графики, отражающие принципиальные свойства перечисленных функциональных зависимостей, приведены на рис. 2.

Для решения линейного разностного уравнения (7) может быть применена процедура, основанная на аппарате z -преобразования (преобразования Лорана), для различных классов функций $\varphi(t)$, см., например, (Деч, 1971; Лексаченко, 2003; Пинни, 1961; Романко, 2006; Старков, 2000; Шабат, 1969). В целях более наглядного представления последующих выкладок преобразуем решаемое уравнение, осуществив сдвиг на один период вперед:

$$x_{t+1} - \gamma \cdot x_t = \varphi(t), \tag{8}$$

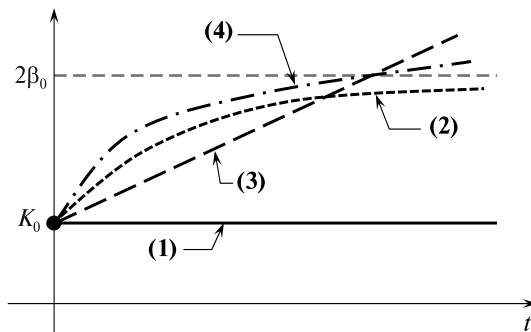


Рис. 2. Возможные способы моделирования функциональной зависимости $\beta(t)$

где

$$\varphi(t) = \beta(t+1) - \gamma \cdot \beta(t). \quad (9)$$

Начнем с наиболее простого (и наименее реалистичного) случая, олицетворяемого классом (1), — ситуации, при которой издержки (внутреннее потребление) финансовой системы предполагаются неизменными. В этом случае правая часть функция $\varphi(t)$, находящаяся в правой части уравнения (8), принимает вид

$$\varphi(t) = \beta(t+1) - \gamma \cdot \beta(t) = \beta_0 - \gamma \cdot \beta_0 = a_0 = \text{const}.$$

Таким образом, функция $\varphi(t)$ относится к тому же классу, что и исходная управляющая функция финансовой системы $\beta(t)$. Как несложно заметить, данным свойством обладают и остальные классы функциональных зависимостей, предлагаемых нами для моделирования $\beta(t)$.

Полагая $x_t \rightarrow X(z)$, для левой части уравнения получаем образ

$$x_{t+1} - \gamma \cdot x_t \xrightarrow{z} z \cdot X(z) - z \cdot x_0 - \gamma \cdot X(z), \quad (10)$$

а для правой части

$$a_0 \xrightarrow{z} a_0 \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (11)$$

Тогда для z -образов исходного уравнения получаем равенство

$$X(z) \cdot (z - \gamma) = a_0 \cdot \frac{z}{z-1} + x_0 \cdot z \quad (12)$$

или

$$\frac{X(z)}{z} = a_0 \cdot \frac{1}{(z-\gamma)(z-1)} + x_0 \cdot \frac{1}{z-\gamma} \quad (13)$$

Принимая во внимание, что дробно-рациональные функции, стоящие в правой части (13), можно представить как

$$\frac{1}{(z-\gamma)(z-1)} = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{z-1} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$X(z) = a_0 \cdot \left[\frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{z}{z-\gamma} - \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{z}{z-1} \right] + x_0 \cdot \frac{1}{z-\gamma}. \quad (15)$$

Применив к (15) обратное z -преобразование и принимая во внимание, что

$$\gamma^t \xrightarrow{z} \frac{z}{z-\gamma}, \quad \begin{cases} 1, t \geq 1, \\ 0, t < 0 \end{cases} \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1},$$

получаем решение уравнения (8)

$$x_t = a_0 \cdot \left[\frac{1}{\gamma-1} \cdot \gamma^t - \frac{1}{1-\gamma} \right] + x_0 \cdot \gamma^t \quad (16)$$

или

$$x_t = \left[\frac{a_0}{\gamma-1} + x_0 \right] \cdot \gamma^t - \frac{a_0}{\gamma-1}. \quad (17)$$

Действуя по аналогии, мы можем найти решение уравнения (8) в предположении, что внутренние издержки финансовой системы описываются экспонен-

циально-асимптотической зависимостью, приближающейся к некоторому уровню насыщения. В этом случае $\varphi(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \beta(t+1) - \gamma \cdot \beta(t) = \beta_0 \cdot (2 - e^{-\lambda(t-1)}) - \gamma \cdot \beta_0 \cdot (2 - e^{-\lambda(t-1)}) = \\ &= \beta_0 \cdot (\gamma - e^{-\lambda}) \cdot e^{-\lambda t} + 2 \cdot \beta_0 \cdot (1 - \gamma), \end{aligned} \quad (18)$$

т. е. в конечном счете сводится к функциональной зависимости вида

$$\varphi(t) = a_1 \cdot \theta^t + a_0, \quad (19)$$

где

$$a_1 = \beta_0 \cdot (\gamma - e^{-\lambda}); \quad a_0 = 2 \cdot \beta_0 \cdot (1 - \gamma); \quad \theta = e^{-\lambda}. \quad (20)$$

Полагая $x_t \rightarrow X(z)$, для левой части уравнения (8) получаем образ

$$x_{t+1} - \gamma \cdot x_t \xrightarrow{z} z \cdot X(z) - z \cdot x_0 - \gamma \cdot X(z), \quad (21)$$

а для правой части

$$a_1 \cdot \theta^t + a_0 \xrightarrow{z} a_1 \cdot \frac{z}{z - \theta} + a_0 \cdot \frac{z}{z - 1}. \quad (22)$$

С учетом разложения

$$\frac{1}{(z - \gamma)(z - \theta)} = \frac{1}{\gamma - \theta} \cdot \frac{1}{z - \gamma} + \frac{1}{\theta - \gamma} \cdot \frac{1}{z - \theta}$$

получаем

$$\begin{aligned} X(z) &= a_1 \cdot \left[\frac{1}{\gamma - \theta} \cdot \frac{z}{z - \gamma} - \frac{1}{\gamma - \theta} \cdot \frac{z}{z - \theta} \right] + \\ &+ a_0 \cdot \left[\frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{z}{z - \gamma} - \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{z}{z - 1} \right] + x_0 \cdot \frac{z}{z - \gamma}. \end{aligned} \quad (23)$$

Применив к (23) обратное z -преобразование и принимая во внимание, что

$$\gamma^t \xrightarrow{z} \frac{z}{z - \gamma}, \quad \theta^t \xrightarrow{z} \frac{z}{z - \theta}, \quad \begin{cases} 1, & t > 1, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{z} \frac{z}{z - 1},$$

получаем решение уравнения (8) для $\varphi(t)$, задаваемой как (19),

$$x_t = a_1 \cdot \left[\frac{1}{\gamma - \theta} \cdot \gamma^t - \frac{1}{\gamma - \theta} \cdot \delta^t \right] + a_0 \cdot \left[\frac{1}{\gamma - 1} \cdot \gamma^t - \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \delta^t \right] + x_0 \cdot \gamma^t \quad (24)$$

или

$$x_t = \frac{a_1}{\gamma - \theta} \cdot [\gamma^t - \theta^t] + \left[\frac{a_0}{\gamma - 1} + x_0 \right] \cdot \gamma^t - \frac{a_0}{\gamma - 1}. \quad (25)$$

При сопоставлении решений (17) и (25) мы достаточно легко выявляем то влияние, которое вносит гипотеза об экспоненциально-асимптотической форме внутренних издержек финансовой системы (по сравнению с ситуацией их постоянства). А именно, оно описывается слагаемым

$$\frac{a_1}{\gamma - \theta} \cdot [\gamma^t - \theta^t].$$

Теперь перейдем к случаю линейно-пропорционального возрастания издержек финансовой системы во времени. В этом случае $\varphi(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \beta(t+1) - \gamma \cdot \beta(t) = \lambda \cdot (t+1) + \beta_0 - \gamma \cdot (\lambda \cdot t + \beta_0) = \\ &= \lambda \cdot (1 - \gamma) \cdot t + \lambda + \beta_0 \cdot (1 - \gamma),\end{aligned}\quad (26)$$

т. е. сводится к виду линейной зависимости от параметра t

$$\varphi(t) = a_1 \cdot t + a_0, \quad (27)$$

где

$$a_1 = \lambda \cdot (1 - \gamma); \quad a_0 = \lambda + \beta_0 \cdot (1 - \gamma). \quad (28)$$

Полагая $x_t \rightarrow X(z)$, для левой части уравнения (8) получаем образ

$$x_{t+1} - \gamma \cdot x_t \xrightarrow{z} z \cdot X(z) - z \cdot x_0 - \gamma \cdot X(z), \quad (29)$$

а для правой части

$$a_1 \cdot t + a_0 \xrightarrow{z} a_1 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + a_0 \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (30)$$

С учетом разложения

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-\gamma)} = \frac{1}{(\gamma-1)^2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(\gamma-1)^2} \cdot \frac{1}{z-\gamma} \quad (31)$$

получаем

$$\begin{aligned}X(z) &= a_1 \cdot \left[-\frac{1}{(\gamma-1)^2} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{(\gamma-1)^2} \cdot \frac{z}{z-\gamma} \right] + \\ &+ a_0 \cdot \left[\frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{z}{z-\gamma} - \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{z}{z-1} \right] + x_0 \cdot \frac{z}{z-\gamma}.\end{aligned}\quad (32)$$

Применив к (32) обратное z -преобразование и принимая во внимание, что

$$t \xrightarrow{z} \frac{z}{(z-1)^2}, \quad (33)$$

получаем решение уравнения (8) для $\varphi(t)$, задаваемой линейной зависимостью

$$x_t = -\frac{a_1}{\gamma-1} \cdot t + \left[\frac{a_0}{\gamma-1} + \frac{a_1}{(\gamma-1)^2} + x_0 \right] \cdot \gamma^t - \frac{a_1}{(\gamma-1)^2} - \frac{a_0}{\gamma-1}. \quad (34)$$

На основе сравнения решений (34) и (25) может быть построена количественная оценка последствий линейно-пропорционального возрастания издержек финансовой системы (по сравнению с ситуацией постоянных издержек):

$$\frac{a_1}{(\gamma-1)^2} \cdot (\gamma^t - 1) - \frac{a_1}{\gamma-1} \cdot t.$$

Для случая, когда издержки финансовой системы описываются степенной функциональной зависимостью

$$\beta(t) = \beta_0 + \lambda \cdot t^\kappa,$$

а функция $\varphi(t)$, соответственно, имеет вид

$$\varphi(t) = \lambda \cdot ((t+1)^\kappa - t^\kappa), \quad (35)$$

аналитического решения разностного уравнения (8) не существует. Поэтому при выборе данного класса функциональной зависимости мы вынуждены будем ограничиться только методами численного моделирования поведения ряда x_t . Впрочем, с точки зрения последующих практических приложений трехсектор-

ной модели данное ограничение не является критичным. В зависимости от глубины временного горизонта, на котором осуществляется моделирование исследуемой макросистемы, мы можем функцию (35) аппроксимировать ранее рассмотренными функциональными зависимостями: константой, показательной либо линейно-пропорциональной.

Практическое применение

Важнейшее направление практического использования трехсекторной модели динамики макроэкономической системы, как уже говорилось ранее, связано со сравнительным анализом теоретических траекторий, задаваемых решениями (17), (25) и (34) и обеспечивающих выполнение условия баланса спроса и предложения (4), с одной стороны, и фактической динамики значений собственного платежеспособного спроса, предъявляемого сектором потребления, с другой.

Заметим, что термин «фактическая динамика» в данном контексте является достаточно условным. Это, в первую очередь, определяется невозможностью однозначного сопоставления значений x_t с какими-либо реально существующими показателями системы национальных счетов. Речь может идти исключительно о некоторых оценочных величинах. В частности, эти оценки могут быть заданы в форме ряда, описываемого соотношением (1), при конкретном α . При этом единицы измерения рационально выбирать таким образом, чтобы $x_0 = 1$.

В качестве условного ориентира при определении значения α может быть использован темп роста денежных доходов населения. Подчеркнем, с большим числом оговорок и поправок. Прежде всего связанных с тем, что под x_t понимаются именно те средства населения, которые идут именно на потребление, а не, допустим, на возврат ранее взятых кредитов.

Задачи идентификации значения параметра γ , а также вида функциональных зависимостей $\beta(t)$ и их параметров представляют не меньшую сложность. По всей видимости, не существует бесспорных или, по крайней мере, приоритетных рецептов их решения. В частности, вполне разумными представляются процедуры, основанные на использовании многовариантных экспертных оценок параметров, с выводами, формулируемыми в формате «при значении параметров в указанном диапазоне мы будем иметь следующую сбалансированную траекторию роста собственного потребительского спроса и угрозу дисбаланса в t -м периоде».

Проиллюстрируем эту идею с помощью следующего примера, в рамках которого рассматривается динамика условной макроэкономической системы для 24 периодов ($t = 0, \dots, 24$). Например, речь может идти о ежеквартальных данных, наблюдаемых в течение шести лет.

Таблица содержит параметры, задающие функции издержек финансовой системы $\beta(t)$. Графики данных функций представлены на рис. 3. Как несложно заметить, в соответствии с определенными параметрами начальный уровень издержек равен 0,05 (5% от начальной величины собственного платежеспособного спроса потребителя $x_0 = 1$). Предельное значение установлено равным 0,1. Таким образом, в рамках рассматриваемого примера разные типы функциональных зависимостей представляют разные сценарии достижения предельного уровня.

На рис. 4 представлены графики динамики рядов значений собственного спроса потребителя, соответствующие как соотношению (1) при $\alpha = 1,01$, так и решениям, удовлетворяющим условию баланса (4) (для функциональных зависимостей $\beta(t)$, определенных в табл.). При этом значение темпа роста объема предложения со стороны производителя установлено как $\gamma = \alpha = 1,01$.

Параметры функций, задающих издержки финансовой системы

№	Тип	Формула	Значения параметров		
			β_0	λ	κ
1	Постоянный уровень	$\beta^{(1)}(t) = \beta_0$	0,05	—	—
2	Экспоненциальное асимптотическое приближение к уровню насыщения	$\beta^{(2)}(t) = \beta_0 \cdot (2 - e^{-\lambda t})$	0,05	0,090	—
3	Линейно-пропорциональное возрастание	$\beta^{(3)}(t) = \lambda \cdot t + \beta_0$	0,05	0,002	—
4	Степенной рост	$\beta^{(4)}(t) = \beta_0 + \lambda \cdot t^\kappa$	0,05	0,018	0,3

Источник: условные данные.

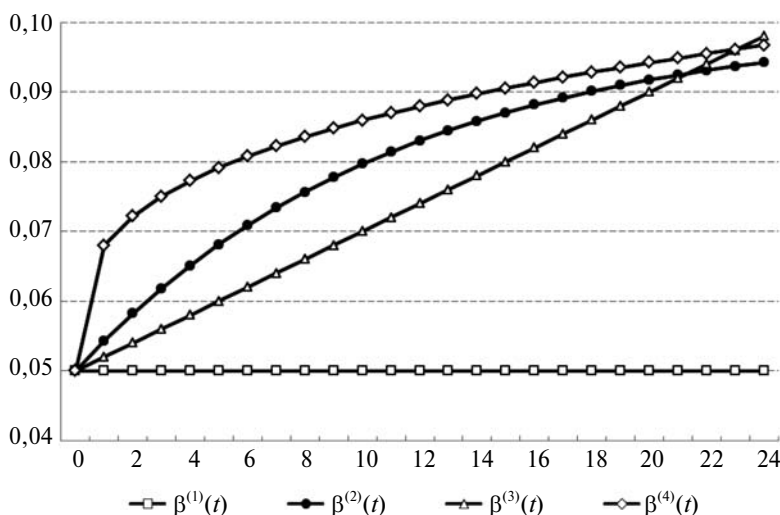


Рис. 3. Графики динамики издержек финансовой системы для различных видов моделирующих функциональных зависимостей (для параметров, определенных в табл. 1)

Как следует из рис. 4, во всех случаях за исключением ситуации с постоянными издержками финансовой системы ($\beta^{(1)}(t)$) наблюдается систематическое отставание собственного спроса потребителя от теоретических (сбалансированных) траекторий $x_t^{(2)}$, $x_t^{(3)}$, $x_t^{(4)}$. При этом сами траектории на финальных этапах

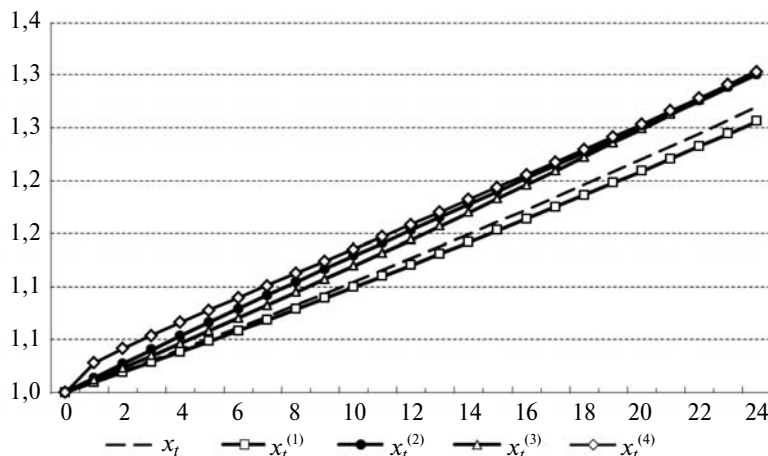


Рис. 4. Графики динамики значений собственного спроса потребителя (для параметров $\gamma = \alpha = 1,01$)

($t = 20, \dots, 24$) достаточно близки друг к другу (см. рис. 4), что в содержательном плане означает эквивалентность свойств функциональных зависимостей $\beta^{(2)}(t)$, $\beta^{(3)}(t)$ и $\beta^{(4)}(t)$, как инструментов моделирования поведения финансовой системы. Разумеется, данный вывод справедлив исключительно для значений параметров, которые были установлены в табл.

Таким образом, в предположении адекватности (приемлемости) предпосылок трехсекторной модели ее очевидной рекомендацией для государственных институтов, осуществляющих макроэкономическое регулирование, является оказание такого воздействия на темпы роста платежеспособного потребительского спроса (α), которое бы приближало траекторию x_t к траектории $x_t^{(q)}$, где q — номер функциональной зависимости, выбранной для моделирования динамики издержек финансовой системы. Разумеется, нельзя исключать и управляющие воздействия на другие параметры модели (темп роста предложения производителя γ и параметры функции $\beta^{(q)}(t)$), от которых зависит динамика теоретической траектории сбалансированного роста $x_t^{(q)}$.

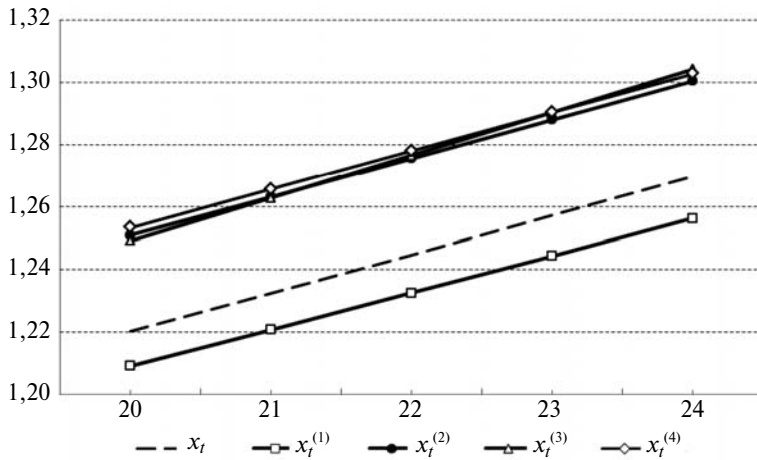


Рис. 5. Графики динамики значений собственного спроса потребителя (для параметров $\gamma = \alpha = 1,01$) для $t = 20, \dots, 24$

Заключение

Проведенные процедуры практической верификации трехсекторной модели динамики макроэкономической системы позволяют, по мнению авторов, в целом позитивно оценить возможности ее использования при проведении качественного анализа фундаментальных тенденций развития макроэкономических систем. Разумеется, речь может идти исключительно об использовании предлагаемого математического аппарата в качестве дополнительного альтернативного инструмента макроэкономического анализа наряду с традиционными модельными инструментами, применяемыми при решении данных задач.

Среди возможных перспективных направлений развития исследований, описанных в настоящей статье, могут быть названы:

- поиск альтернативных форм функциональных зависимостей для моделирования управляющей функции $\beta(t)$, отражающих в базовом соотношении (7) собственные издержки финансовой системы;
- изучение содержательных аспектов взаимосвязей между видом функциональной зависимости $\beta(t)$, наблюдаемой по статистической базе, и иными фундаментальными параметрами (характеристиками) макроэкономической системы;

- построение расширенной версии трехсекторной модели, учитывающей дополнительные факторы; в частности, сезонные случайные («шоковые») выбросы в динамике в рядах параметров x_t , c_t и b_t , а также взаимосвязи между несмежными периодами;
- усложнение схемы взаимодействия составных частей трехсекторной модели за счет включения в нее непосредственных связей между производителем и финансовой системой, отражающих процессы кредитования производственного сектора.

Источники

- Глазьев С. Ю.* Стратегия модернизации российской экономики в условиях мирового кризиса. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://maxpark.com/user/sergeyglasiev/content/512573> (дата обращения: 26.07.2010).
- Делягин М. Г.* Как самому победить кризис: наука экономить, наука рисковать: простые советы. М., 2009.
- Делягин М. Г.* Кризис человечества. Выживет ли Россия в нерусской смуте? М., 2010.
- Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., 1971.
- Дума не стала ограничивать ставки по потребкредитам. Сайт Business FM. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.bfm.ru/news/236252?doctype=news> (дата обращения: 13.11.2013).
- Конюховский П. В.* Моделирование стохастической динамики финансовых ресурсов. СПб., 2002.
- Лексаченко В. А.* Преобразование Фурье, Лапласа, z-преобразование и линейные стационарные системы. М., 2003.
- Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., 1961.
- «РГ»: просроченные кредиты граждан РФ выросли на 35%. Сайт Business FM. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.bfm.ru/news/233087?doctype=news> (дата обращения: 17.10.2013).
- Романко В. К.* Разностные уравнения. СПб., 2006.
- Россияне закредитовались и грозят себе дефолтами. Сайт Business FM. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.bfm.ru/news/223795?doctype=article> (дата обращения: 29.07.2013).
- Старков В. Н.* Операционное исчисление и его применения. СПб., 2000.
- ЦБ хочет ограничить ставки по кредитам для граждан. Сайт Business FM. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.bfm.ru/news/237065?doctype=news> (дата обращения: 23.11.2013).
- Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
- Barba A., Pivetti M.* Rising Household Debt: Its Causes and Macroeconomic Implications — a Long-period Analysis // Cambridge Journal of Economics. 2009. Vol. 33. N 1. P. 113—137.
- Berg L.* Household Savings and Debts: The Experience of the Nordic Countries // Article provided by Oxford University Press in its Journal Oxford Review of Economic Policy. 1994. Vol. 10. Iss. 2. Summer. P. 42—53.
- Debelle G.* Household Debt and the Macroeconomy // Bank for International Settlements (BIS). Quarterly Review. 2004. March. Reserve Bank of Australia.
- Jappelli T., Pistaferri L.* The Consumption Response to Income Changes // The National Bureau of Economic Research / Working Paper N 15739. Issued in February 2010.
- Sufian F., Habibullah M. S.* Bank Specific and Macroeconomic Determinants of Bank Profitability: Empirical Evidence from the China Banking Sector // Article Provided by Springer in its Journal Frontiers of Economics in China. 2009. Vol. 4. N 2. June. P. 274—291.