ИСТОРИЯ ФИНАНСОВ И УЧЕТА

П. А. Ватник

докт. экон. наук, профессор кафедры исследования операций в экономике им. проф. Ю. А. Львова Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета

ДАНИИЛ БЕРНУЛЛИ — ЭКОНОМИСТ

В энциклопедиях о Данииле Бернулли (1700—1782) пишут, что он был математиком, механиком, физиком, физиологом, медиком, анатомом, ботаником. Действительно, в 1725 г. 25-летний ученый был приглашен в Петербургскую Академию наук на кафедру физиологии, затем — на кафедру механики. По возвращении в Базель в 1733 г. он стал профессором физиологии (по другим данным — анатомии и ботаники), а с 1750 г. — профессором физики.

Сам он считал себя физиологом. Следует заметить, что в то время физиология понималась как учение о движении «жизненных токов». Однако для понимания движения жидкостей в организме требовалось изучить общие законы механики жидкости, чем он и занялся. Петербургский период деятельности Даниила Бернулли завершился созданием большой и самой знаменитой его работы «Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей» («Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii»), изданной в Санкт-Петербурге в 1738 г. и сразу ставшей классической.

И в том же самом году в пятом томе «Записок Петербургской Императорской Академии наук» была напечатана его 18-страничная статья «Опыт новой теории измерения жребия» (Bernoulli, 1738), оцененная значительно позже: она значительно опередила свое время, и должно было пройти 150—200 лет, чтобы высказанные в ней идеи вписались в контекст экономической мысли.

Обратимся к тексту статьи.

1. Статья начинается с констатации того факта, что все математики утверждают: оценкой значения случайного выигрыша служит его математическое ожидание. (Термином «математическое ожидание» Бернулли не пользуется — он был введен П. Лапласом (1749—1827) лишь в 1795 г., но понятие математического ожидания было еще в середине XVII в. использовано Б. Паскалем (1623—1662) и Х. Гюйгенсом (1629—1695) в теории азартных игр.) Бернулли подчеркивает, что такой подход основан на предположении, что оценка случайного исхода зависит только от вероятностей возможных значений, которые одинаковы для всех людей:

> ⟨...⟩ *Личные обстоятельства каждого из них при этом не имеют значения, а всё зависит от обстоятельств наступления ожидаемого события.*
>
> *Подобное суждение могло бы быть постановлением, вынесенным верховным судьей, но ведь здесь речь идет не о судебных решениях, а о рекомендациях, а именно, о правилах, посредством которых каждый сам мог бы оценить свой жребий в зависимости от состояния своих дел.*

Измерить жребий, утверждает Бернулли, невозможно, если неизвестна полезность выигрыша для данного лица. Но она может зависеть от разных обстоятельств, т. е. оценка случайного исхода имеет индивидуальный характер.

Это утверждение выходит за пределы оценки жребия, оно носит общий характер:

> ⟨…⟩ *Оценка измеряется не ценой вещи, а выгодой, которую каждый из нее извлекает.*

В частности, это объясняет любой акт обмена: обмен состоится, если каждый его участник получает бóльшую полезность, чем отдает взамен. Эквивалентный (по полезности) обмен был бы лишен всякого смысла — соображение, в явной форме высказанное Адамом Смитом (1723—1790) примерно через 40 лет.

2. Из множества обстоятельств, определяющих полезность выигрыша, Бернулли выделяет богатство индивида: один и тот же выигрыш для бедняка обычно имеет существенно большее значение, чем для богача. Далее следует такое рассуждение:

> ⟨…⟩ *Предположим, что состояние человека увеличивается лишь путем последовательных добавлений бесконечно малых приращений. Но в таком случае весьма вероятно, что любой малый выигрыш дает выгоду, которая обратно пропорциональна уже имеющемуся состоянию.*

Для Даниила, члена семьи Бернулли, математика и механика, рассуждение, основанное на анализе бесконечно малых величин, совершенно естественно. Но до маржинализма как аппарата экономической теории, до работ его пионеров — О. Курно (1801—1877), И. Тюнена (1783—1850), Г. Госсена (1810—1858) — оставалось еще около века. У. Джевонс (1835—1882), по-видимому, первым из экономистов обратил внимание на статью Бернулли, созвучную его собственной гипотезе убывающей предельной полезности дохода.

3. Но Бернулли пишет об убывающей полезности богатства, а не дохода. Как же понимает он богатство? Вот как:

> ⟨…⟩ *Под состоянием я понимаю здесь всё то, что может дать пищу, одежду, даже роскошь и возможность удовлетворить какие-либо желания. В соответствии с этим мы не можем, собственно, ни о ком сказать, что он не имеет совсем ничего, если только он как раз сейчас не умирает с голоду, и для большинства людей основную часть их состояния составляет их работоспособность, которая включает в себя также способность к попрошайничеству: того, кто попрошайничеством добывает ежегодно 10 золотых гульденов, трудно убедить при условии никогда больше не попрошайничать* ⟨…⟩ *принять сумму в 50 золотых гульденов и тем самым лишить себя возможности существовать дальше, когда они кончатся.* ⟨…⟩ *Но если нищий не хочет согласиться на вышеуказанное условие, если только он не получит чистыми 100 золотых гульденов, то мы должны будем сказать, что* ⟨его⟩ *состояние составляет 100 золотых гульденов.*

Здесь обращают на себя внимание два момента. Во-первых, как считает Бернулли, богатство (состояние) не ограничивается имуществом человека. Оно включает его будущие доходы. Это вполне соответствует современному пониманию богатства, согласно которому нищий, не располагающий никаким имуществом, имеет богатство, величина которого определяется (дисконтированным) потоком будущих доходов.

Во-вторых, в этом фрагменте угадывается идея человеческого капитала как источника этих доходов (*«для большинства людей основную часть их состояния* *составляет их работоспособность»*) — идея, оформившаяся и включенная в оборот экономической науки лишь в середине XX в.

4. Итак, Бернулли исходит из утверждения, что предельная полезность богатства обратно пропорциональна величине богатства, т. е.

$$\frac{dU(w)}{dw} = \frac{k}{w},$$

где w — величина богатства; $U(w)$ — его полезность, рассматриваемая как функция величины богатства; k — коэффициент пропорциональности, определяющий единицу полезности (здесь и далее используются современные обозначения). Отсюда выводится выражение для функции полезности:

$$U(w) = k \ln w.$$

Далее он предлагает оценивать случайную ситуацию, имеющую своими исходами выигрыши — приращения богатства (не обязательно положительные) x_i с вероятностями p_i, ориентируясь на математическое ожидание полезности

$$\sum_i U(w_0 + x_i)p_i,$$

где w_0 — начальная величина богатства. Общая оценка ситуации — такой детерминированный выигрыш y, который удовлетворяет уравнению

$$U(w_0 + y) = \sum_i U(w_0 + x_i)p_i,$$

т. е. выигрыш, после которого полезность богатства стала бы равна математическому ожиданию полезности при случайных исходах (в современной терминологии — безрисковый эквивалент).

Для предложенной Бернулли логарифмической функции полезности богатства это приводит к «мере жребия»

$$y = \prod_i (w_0 + x_i)^{p_i} - w_0.$$

Он отмечает, что при этом оценка y меньше математического ожидания выигрыша,

$$y < \sum_i x_i p_i,$$

и связывает это обстоятельство с единственным свойством логарифмической функции — с ее вогнутостью. Сегодня это неравенство — следствие неравенства Йенсена (1906 г.) — играет существенную роль в математическом анализе, в теории вероятности и статистике.

5. Для подтверждения справедливости предлагаемой «меры жребия» Бернулли рассматривает такую очевидную сделку с риском, как страхование.

Он разбирает следующий пример. Купец Каюс из Петербурга закупил в Амстердаме товаров на 10 тыс. руб. и отправил их в Петербург морем; в это время года на пути из Амстердама в Петербург погибает каждый 20-й корабль. Он хочет застраховать свой товар.

Математическое ожидание возможного ущерба Каюса составляет 500 руб. Если он исходит из критерия математического ожидания, то ему выгодно страхование, если плата за него меньше 500 руб. Если страховщик согласится на сделку, то в страховом случае (вероятность которого 0,05) ему придется выплатить Каюсу 10 тыс. руб., так что, руководствуясь критерием математического ожидания, он сочтет для себя сделку выгодной, если плата будет больше 500 руб. Итак, традиционное представление об измерении случайных исходов приводит к заключению о невозможности страхования. Но страхование все-таки существует, следовательно, его участники руководствуются иными мерами риска.

Ситуация коренным образом меняется, если люди делают выбор, руководствуясь критерием, предложенным Бернулли. Допустим, что никто не соглашается предоставить купцу страховку меньше чем за 800 руб. Каково должно быть богатство Каюса, чтобы его устроила сделка на этих условиях? Пусть, кроме закупленных товаров, Каюс располагает еще богатством в количестве w_0. Безразличие (страховать или не страховать груз) имеет место при выполнении равенства

$$(w_0 + 10000)^{0,95} \cdot w_0^{0,05} \approx w_0 + 9200,$$

откуда $w_0 \approx 5043$. Если Каюс, кроме груза, обладает суммой больше 5043 руб., то он поступит рационально, отказавшись от слишком дорогой сделки. Но если эта сумма меньше 5043 руб., то потеря груза с вероятностью 0,05 для него ощутимее платы за страховку в размере 800 руб.

Теперь возникает вопрос: при каком минимальном богатстве w_1 страховщик согласится на эту сделку? Ответ дает уравнение

$$(w_1 + 800)^{0,95} \cdot (w_1 - 9200)^{0,05} = w_1,$$

откуда $w_1 \approx 14243$. Итак, если $w_0 \approx 5043$ и $w_1 \approx 14243$, сделка окажется выгодной для обоих ее участников.

Таким образом, критерий Бернулли, в отличие от критерия математического ожидания, согласуется с существованием страхования.

6. Далее Бернулли разбирает другой пример, также говорящий в пользу предложенного им критерия. Другой купец, Семпрониус, имеет 4000 дукатов и, кроме того, в дальних странах — товаров на сумму 8000 дукатов, которые можно доставить только морем. Известно, что каждый 10-й корабль пропадает. Если все заморские товары Семпрониус отправит на одном корабле, то их оценка (по Бернулли) составит 6751 дукат; если же он отправит их равными частями на 2 кораблях, то оценка составит 7033 дуката.

> *И, следовательно, ожидание Семпрониуса будет тем более благоприятным, чем меньше будут отдельные части, которые он доверит каждому судну. И тем не менее это ожидание не превысит стоимость в 7200 дукатов.*

(Оценка по математическим ожиданиям во всех этих случаях дает величину 7200 дукатов.) Таким образом, предлагаемая оценка жребия соответствует житейскому правилу «не класть все яйца в одну корзину».

И далее следует вывод:

> *Это замечание могло бы быть полезным для тех, кто вкладывает свое состояние в ценные бумаги или подвергает его иным превратностям случая.*

Тем самым обосновывалась операция, известная сегодня как разделение риска и интуитивно привлекательная во времена Бернулли (хотя и расходящаяся с рекомендациями, основанными на критерии математического ожидания).

7. Изложение «новой теории измерения жребия» заключается следующими фразами:

> *Очень многое из того, что я, к сожалению, вынужден пропустить, могло бы тоже оказаться новым и уж ни в коем случае не бесполезным. ⟨…⟩ И именно потому, что все эти положения так хорошо согласуются с результатами естественного опыта, было бы неправильно пренебречь ими, как недоказанными истинами, основанными только на сомнительных гипотезах.*

Для иллюстрации этого положения Бернулли анализирует задачу, которую предложил ему его двоюродный брат Николай Бернулли (1687—1759), профессор математики в Падуе, логики и права — в Базеле. Вот эта задача, которая, по словам Даниила Бернулли, послужила толчком для изложенных соображений:

> *Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это произойдет после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?*

Вероятность того, что монета выпадет нужной стороной после первого броска равна $^1/_2$, после второго — $^1/_4$, после n-го — 2^{-n}, выигрыш в случае n бросков составляет 2^{n-1} дукатов, так что традиционная мера случайных исходов — математическое ожидание — приводит в данном случае к бесконечной оценке:

$$1 \times {}^1/_2 + 2 \times {}^1/_4 + \ldots 2^{n-1} \times 2^{-n} + \ldots = {}^1/_2 + {}^1/_2 + \ldots + {}^1/_2 + \ldots$$

Оценка жребия по Бернулли, как следует из всего сказанного выше, зависит от начального богатства Павла. Если он перед игрой не имел ничего, то его оценка составляет 2 дуката, если он имел 10 дукатов, то примерно 3 дуката, а при начальном богатстве 1000 дукатов — около 6 дукатов.

8. В 1894 г. немецкий математик Альфред Прингсгейм (1850—1941) издал перевод статьи Даниила Бернулли на немецкий язык (Bernoulli, 1896) и тем самым сделал ее доступной для европейских читателей своего времени. Этот перевод послужил впоследствии основой для английского (Bernoulli, 1954) и русского (Бернулли, 1993) переводов. Разбираемая в конце статьи задача, получившая название «петербургский парадокс», на протяжении XX в. стала популярным примером в учебниках и популярных изданиях по теории вероятностей.

Судьба функции полезности, предложенной Бернулли, сложилась довольно прихотливо.

Во второй половине XIX в. в работах маржиналистов сформировалась количественная теория потребительской полезности. Основное ее предположение состояло в том, что потребляемому набору благ $\mathbf{x}$ потребитель ставит в соответствие определенную величину полезности; таким образом, у каждого потребителя существует индивидуальная функция полезности наборов благ $u(\mathbf{x})$, соответствующая его предпочтениям. Так как следующая единица потребляемого блага приносит меньший прирост удовлетворения, чем предыдущая, предельная полезность благ должна быть убывающей. Функция полезности благ породила косвенную полезность дохода $v(Y)$ — максимальную полезность набора, приобретаемого потребителем, имеющим доход Y. Из убывающей предельной полезности благ следовала убывающая предельная полезность дохода, что как будто соответствовало гипотезе Бернулли.

Но в начале XX в. В. Парето (1848—1923) обратил внимание на то обстоятельство, что потребителю, имеющему функцию полезности $u(\mathbf{x})$ набора благ $\mathbf{x}$, можно приписать другую функцию полезности, $u_1(\mathbf{x})$, сохраняющую порядковые отношения: если $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, то $u_1(\mathbf{x}) > u_1(\mathbf{y})$, и обратно. И то и другое неравенства означают лишь, что потребитель предпочитает набор $\mathbf{x}$ набору $\mathbf{y}$. Поэтому потребители с функциями полезности $u(\mathbf{x})$ и $u_1(\mathbf{x})$, получающие одинаковый доход и находящиеся в одной и той же ценовой среде, с необходимостью производят одинаковый выбор. Принцип, известный как «бритва Оккама», требовал отказа от «лишней» гипотезы количественной определенности полезности.

На смену количественной концепции полезности пришла порядковая концепция, разрабатывавшаяся в течение первой трети XX в. и завершенная работами Дж. Хикса и Р. Аллена. Разумеется, экономисты-теоретики продолжали пользоваться функциями полезности, но лишь в качестве технического инструмента анализа; результаты анализа не должны были изменяться от замены функции $u(\mathbf{x})$ другой функцией, $u_1(\mathbf{x})$, сохраняющей порядковые отношения исходной функции, а в остальном — произвольной.

Полезность дохода или богатства в рамках порядковой теории сама по себе была лишена смысла. Произвольность количественной интерпретации порядковой функции полезности приводила лишь к тривиальному результату: чем больше богатство, тем лучше, а о предельной полезности можно было сказать только, что она положительна. Вопрос о том, возрастает она или убывает, в рамках этой теории бессмыслен.

Однако порядковая теория полезности описывала потребительский выбор лишь в условиях полной определенности, когда принимающий решение индивид точно знает, к каким последствиям это решение приведет. Создатели современной теории риска Дж. фон Нейман (1903—1957) и О. Моргенштерн (1902—1977), отправляясь в своем основополагающем труде (Neumann, Morgenstern, 1944) от статьи Даниила Бернулли, строят аксиоматическую теорию поведения потребителя, встретившегося со случайностью. Центральная аксиома этой теории состоит в том, что потребитель в состоянии сравнивать по полезности не только определенные наборы благ, но и «лотереи», исходом которых являются наборы благ, получаемые с определенными вероятностями. В этом случае полезность набора благ получает определенную количественную меру. Пусть, например, набор $\mathbf{x}$ доставляет некоторому потребителю такое же удовлетворение, как наборы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ с равными вероятностями. Это означает, что на шкале полезности набор $\mathbf{x}$ должен располагаться ровно посередине между наборами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — утверждение, лишенное смысла в концепции порядковой полезности, но вполне осмысленное в рамках количественной теории. Количественная шкала полезности индивида допускает произвол только в выборе начала отсчета и единицы.

Функция полезности в пространстве благ индуцирует косвенные полезности дохода и богатства; математическое ожидание последней максимизирует индивид, сталкивающийся с рисковой ситуацией. В отличие от Бернулли, фон Нейман и Моргенштерн не оговаривают свойств этой функции: она может быть и вогнутой, и выпуклой. Если она вогнута, это означает, что данный индивид не расположен к риску (рискофоб); если же она выпукла, то такой индивид предпочитает риск (рискофил). У нейтрального к риску индивида полезность богатства описывается линейной функцией (или попросту равна богатству при соответствующем выборе единицы и начала отсчета).

Вскоре после выхода работы фон Неймана и Моргенштерна появилась статья М. Фридмена (1912—2006) и Л. Сэвиджа (1917—1971) (Friedman, Savage, 1948). В ней авторы предпринимают попытку в рамках новой аксиоматики описать характер функции полезности исходя из наблюдаемого поведения людей. Одни и те же люди страхуют свое имущество (т. е. ведут себя как бернуллианские рискофобы) и в то же время участвуют в лотереях, сулящих крупный выигрыш с незначительной вероятностью при небольшой плате за участие (что характеризует их как рискофилов). Авторы приходят к выводу, что типичная функция полезности должна быть вогнутой на одних участках и выпуклой — на других.

Среди сфер приложения теории риска в последние годы на первом месте стоят финансовые рынки. Их модели (в частности, модели теории портфеля) исходят из предположения, что все участники рынков не склонны к риску, правда, в различной степени. Предложены меры неприятия риска; так, функция полезности Бернулли относится к функциям с постоянной относительной мерой Эрроу-Пратта, равной 1.

Но статья Даниила Бернулли явилась не только родоначальницей теории риска. По свидетельству Й. Шумпетера (1883—1950), Бернулли первым применил математические методы в экономике — не для расчетов и не для иллюстративных примеров, а в качестве инструмента теории, «когда сама аргументация, приводящая к тому или иному результату, является полностью математической» (Шумпетер, 2001, с. 1258).

Источники

Бернулли Д. Опыт новой теории измерения жребия // Вехи экономической мысли. Т. 1. Теория потребительского поведения и спроса. СПб., 1993. С. 11—27.

Шумпетер Й. А. История экономического анализа: в 3 т.: пер. с англ. СПб., 2001. Т. 3.

Bernoulli D. Exposition of a new theory on the measurement of risk // Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 23—36.

Bernoulli D. Specimen theoriae novae de mensura sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. T. V. Petropoli, 1738. P. 175—192.

Bernoulli D. Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen / übersetzt und durch Anmerkungen erläutert von Alfred Pringsheim. Leipzig, 1896.

Friedman M., Savage L. J. The utility analysis of choices involving risk // Journal of political economy, 1948. Vol. LVI. № 4. P. 279—304. (Русский перевод: *Фридмен М., Сэвидж Л.* Анализ полезности среди альтернатив, предполагающих риск // Вехи экономической мысли. Т. 1. Теория потребительского поведения и спроса. СПб., 1993. С. 208—249.)

Neumann J. von, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. Princeton, N. J., 1944. (Русский перевод: *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.)