

Е. В. Дорохов

канд. экон. наук, преподаватель кафедры статистики и эконометрики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИНДЕКСА РТС НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ И КОИНТЕГРАЦИИ

Актуальной задачей при исследовании динамики происходящих на отечественном рынке ценных бумаг процессов является прогнозирование возможных будущих значений различных статистических показателей, в частности фондовых индексов. Методы, используемые в настоящее время для прогнозирования показателей в экономических задачах, широко представлены в современных пакетах программ обработки статистической информации. В данной статье отражены результаты применения некоторых из этих методов (а именно методов векторной авторегрессии и коинтеграции) в задаче изучения динамики развития российского рынка ценных бумаг, решаемой путем краткосрочного прогнозирования значений фондового индекса.

Традиционно рассматриваемые в статистике модели из одного уравнения описывают количественные связи, однако не отражают взаимосвязей между объясняющими переменными или их связей с другими переменными. Кроме того, такие модели объясняют связи только в одном направлении — объясняющая переменная влияет на объясняемую, тогда как обратная связь отсутствует. Для того чтобы одновременно охватывать все многообразие связей между переменными, используются *системы одновременных уравнений* (обычно представленные в структурной форме и называемые в этом случае *структурными моделями*). Такие модели, как правило, состоят из набора регрессионных уравнений, которые решаются как система¹. Системы одновременных уравнений позволяют моделировать структуру экономических связей.

Модель, выраженная системой одновременных уравнений (СОУ), служит для объяснения поведения эндогенных (т. е. формирующихся в процессе и внутри функционирования описываемой системы) переменных в зависимости от значений экзогенных (задаваемых извне) и лаговых эндогенных переменных. СОУ широко используются в проведении многовариантных сценарных расчетов, касающихся развития анализируемой системы, а также в задачах прогнозирования различных показателей.

Центральными в построении и анализе модели являются проблемы идентификации СОУ и спецификации модели. Они включают в себя проверку соблю-

¹ Кроме того, могут формироваться имитационные модели, которые строятся на базе заданных уравнений.

дения условий идентифицируемости каждого отдельного уравнения и всей системы в целом, а также реализацию процедур статистического оценивания неизвестных значений параметров системы.

Методы статистического оценивания параметров СОУ подразделяются на два класса: методы, предназначенные для оценки параметров одного отдельно взятого уравнения системы (метод наименьших квадратов, косвенный метод наименьших квадратов¹, двухшаговый метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией); методы, предназначенные для одновременного оценивания параметров всех уравнений системы с учетом их взаимосвязей (трехшаговый метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия с полной информацией)² (Айвазян, Мхитарян, 1998).

Одна из главных конечных прикладных целей построения и анализа моделей в виде СОУ — это точечный и интервальный прогноз эндогенных переменных по заданным значениям предопределенных (экзогенных) переменных и связанная с этим задача проведения многовариантных сценарных расчетов, показывающих, как будут «себя вести» эндогенные переменные при различных сочетаниях значений предопределенных переменных. «Точечное решение» этих задач основано на подсчете значений эндогенных переменных с помощью статистически оцененной формы СОУ. Для получения «интервальных» вариантов решения требуется оценивать ковариационную матрицу ошибок точечного прогноза, что является аналитически достаточно сложной задачей (Айвазян, Мхитарян, 1998).

В попытке справиться со сложностями, присущими структурным моделям СОУ³, в последние десятилетия был разработан и получил широкое распространение еще один подход — построение *моделей векторной авторегрессии (VAR)*. Этот подход был предложен в 1980 г. Симсом, он позволяет уйти от разделения переменных на экзогенные и эндогенные и избавиться от сложностей, связанных с одновременностью уравнений (Sims, 1980). Этот подход является к тому

¹ Если исследователя интересуют только параметры СОУ и задача прогноза эндогенных переменных, то он может ограничиться применением обычного метода наименьших квадратов к каждому отдельному уравнению (с последующей оценкой, если это необходимо, идентифицируемых параметров системы). Такой способ действий называют косвенным методом наименьших квадратов, или методом наименьших квадратов без ограничений, а оценки, полученные с его помощью, будут состоятельными.

² В ряде ситуаций могут оказаться полезными и другие методы статистического оценивания параметров СОУ. Для оценивания параметров одного отдельно взятого уравнения — это метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией (требующий, правда, дополнительного априорного предположения о нормальном характере распределения возмущений модели); для одновременной оценки всех параметров системы — это метод максимального правдоподобия с полной информацией. Однако эти методы из-за их относительно сложной вычислительной реализации и дополнительных априорных допущений существенно реже используются в приложениях.

³ Одна из основных проблем, которую приходится решать на этапе оценки параметров СОУ, — проблема идентификации. Именно эта проблема, наряду с разделением переменных модели на эндогенные и экзогенные (предопределенные), послужила основным поводом для критики стандартного подхода к СОУ. Во-первых, в больших моделях, содержащих сотни переменных и уравнений, иногда трудно определить некоторые переменные как чисто экзогенные. Любое разделение переменных иногда может оказаться экономически оправданным, однако это верно отнюдь не всегда. Например, один из подходов к исследованию эффективности рынка — моделирование временных рядов кросс-курсов различных валют или цен разных финансовых инструментов. Так, рассматривая курсы рубль/доллар, доллар/евро, рубль/евро, трудно сказать, какой из них естественно выбрать эндогенной переменной, а какие — экзогенными. Во-вторых, ряд проблем иного рода существует и в небольших моделях. Например, включение лаговой эндогенной переменной в правую часть некоторых уравнений с целью увеличения числа предопределенных переменных модели иногда не подтверждается веским теоретическим обоснованием.

же естественным обобщением подхода Бокса-Дженкинса к моделям ARIMA¹. Для того чтобы избежать смещения, связанного с применением метода наименьших квадратов непосредственно к каждому уравнению структурной формы, Симс предложил, не производя деления переменных на экзогенные и эндогенные, представить каждый из компонентов многомерного случайного процесса как линейную комбинацию предыдущих значений всех переменных.

Иными словами, в моделях VAR не делается попыток воссоздать реальную структуру моделируемого объекта, в них не проводится различий между эндогенными и экзогенными переменными. Каждое уравнение модели VAR описывает зависимость одной из переменных модели от p лаговых значений всех переменных модели². Таким образом, каждое уравнение модели есть комбинация модели с распределенными лагами и модели авторегрессии. Число уравнений модели VAR равно числу переменных. Следует заметить, что если в обычной авторегрессии коэффициенты являются скалярными величинами, то в случае VAR следует рассматривать уже матрицы коэффициентов.

По сравнению со структурными моделями модели VAR имеют меньшее число параметров и менее строгие ограничения на их значения, что делает модели векторной авторегрессии чрезвычайно полезными при возникновении трудностей со сбором исходной информации³.

Принято выделять три различных формы VAR-моделей: приведенная форма VAR, рекурсивная VAR и структурная VAR (Canova, 1994). Все три формы являются динамическими линейными моделями, которые связывают текущие и прошлые значения вектора n -мерного временного ряда. Приведенная и рекурсивная форма VAR — это статистические модели, которые не включают никаких экономических соображений за исключением выбора переменных. Как правило, эти формы используются для описания данных и прогноза. Структурная VAR включает ограничения, полученные из экономической теории, и эта VAR обычно используется для структурного вывода (проверки соответствия экономических данных конкретной экономической теории) и анализа политики.

Приведенная форма VAR выражает значения многомерного временного ряда X_t в виде распределенного лага его собственных прошлых значений плюс серийно некоррелированный член ошибки. Иными словами, приведенная форма

¹ В принципе, существует и модель VARIMA, включающая ошибку в виде скользящего среднего, но это скорее теоретически, чем практически (Tsiao, Voh, 1981). Авторегрессии легче оценивать, так как выполнено предположение об отсутствии автокорреляции ошибок. В то же время члены скользящего среднего приходится оценивать методом максимального правдоподобия. Так как каждый обратимый процесс скользящего среднего может быть представлен в виде AR(∞) (Суслов, Ибрагимов, Талышева, 2003), чистые авторегрессии могут приближать векторные процессы скользящего среднего, если добавить достаточное число лагов. Предполагается, что при этом ошибка не будет автокоррелированной. Это позволяет с приемлемой точностью моделировать временные ряды, описываемые моделью VARIMA, при помощи авторегрессии достаточно высокого порядка.

² Несмотря на то что такое определение по умолчанию предполагает включение любой экономической переменной модели VAR в состав изучаемых величин, все же существует возможность часть переменных рассматривать как экзогенные.

³ Несомненно, модели векторной авторегрессии имеют недостатки. Например, в ряде случаев трудно подвести теоретическое обоснование и дать экономическую интерпретацию параметрам модели VAR. Однако определенная теоретическая база заложена в начальный выбор переменных, которые войдут в модель.

Другой недостаток моделей векторной авторегрессии — необходимость принятия решения относительно величины лага, а также адекватных методов оценки параметров модели, поскольку обычный метод наименьших квадратов не применим для оценки параметров моделей авторегрессии и в большинстве случаев при оценке параметров моделей с распределенными лагами. Поэтому методы оценки параметров моделей VAR очень громоздки. Однако в целом модели VAR потенциально значительно проще структурных моделей COU.

обобщает одномерную авторегрессию на случай векторов. Математически приведенная форма модели VAR(p) — это система n уравнений, которые можно записать в матричной форме следующим образом:

$$X_t = \alpha + A_1 X_{t-1} + \dots + A_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где α — вектор констант; A_i — матрицы коэффициентов; ε_t — вектор серийно некоррелированных ошибок, о которых предполагается, что они имеют нулевое среднее и диагональную матрицу ковариаций Σ_ε . Ошибки ε_t представляют собой неожиданную динамику в X_t , остающуюся после учета линейно распределенного лага прошлых значений.

Оценить параметры приведенной формы VAR достаточно легко. Каждое из уравнений содержит одни и те же регрессоры (X_{t-1}, \dots, X_{t-p}), и нет взаимных ограничений между уравнениями. Таким образом, эффективная оценка (метод максимального правдоподобия с полной информацией) упрощается до обычного метода наименьших квадратов, примененного к каждому из уравнений системы¹.

Единственная тонкость состоит в определении длины лага p , но это можно сделать, используя информационный критерий (такой как критерий Акаике или Шварца) (MacKinnon, 1990).

На уровне матричных уравнений рекурсивная и структурная VAR выглядят одинаково. Эти две модели VAR учитывают в явном виде одновременные взаимодействия между элементами X_t , что сводится к добавлению одновременного члена к правой части уравнения. Соответственно обе рекурсивная и структурная VAR представляются в следующем общем виде

$$X_t = \beta + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + \dots + B_p X_{t-p} + \eta_t,$$

где β — вектор констант; B_i — матрицы коэффициентов, η_t — ошибки.

Наличие в уравнении матрицы B_0 означает возможность одновременного взаимодействия между n переменными, т. е. B_0 позволяет сделать так, чтобы эти переменные, относящиеся к одному моменту времени, определялись совместно. Из теории идентификации одновременных уравнений известно, что для идентифицируемости элементов B_0 необходимо иметь некоторые идентифицирующие ограничения (Enders, 1992). Рекурсивная VAR и структурная VAR обеспечивают эти идентифицирующие ограничения совершенно по-разному: одна — механически, а другая — на основе экономической теории².

¹ Состоятельной оценкой ковариационной матрицы ошибок Σ_ε выступает выборочная ковариационная матрица, полученная из МНК остатков.

² В рекурсивных VAR идентификация достигается за счет того, что уравнения системы считаются рекурсивными, т. е. считается, что элементы X_t влияют друг на друга одновременно определенным рекурсивным образом. А именно предполагается, что на первый элемент X_t не влияет никакая другая переменная в системе, относящаяся к тому же моменту времени, на вторую переменную оказывает одновременное влияние только первая переменная, на третью переменную оказывают одновременное влияние только первые две переменные и т. д. Это означает, что ошибка метода наименьших квадратов в каждом уравнении должна быть некоррелирована с ошибками в предшествующих уравнениях. Рекурсивная VAR зависит от порядка следования переменных, так как изменение этого порядка меняет уравнения VAR, коэффициенты и ошибки.

Рекурсивную VAR можно оценить двумя способами. Рекурсивная структура дает набор рекурсивных уравнений, которые можно оценить с помощью МНК. Эквивалентный способ оценивания заключается в том, что уравнения приведенной формы, рассматриваемые как система, умножаются слева на нижнюю треугольную матрицу, множитель в так называемом разложении Холецкого для матрицы Σ_ε .

Структурная форма VAR использует экономическую теорию для задания порядка одновременных связей между переменными. Как и в упомянутом ранее более общем случае моделей од-

Предсказать стабильный характер поведения реализаций рядов, связанных VAR-моделью, можно, анализируя коэффициенты модели. Для этого удобно записать приведенную форму $VAR(p)$, используя лаговый оператор, который воздействует на временной ряд и определяется соотношением: $Lx_t = x_{t-1}$ (если лаговый оператор применяется k раз, что обозначается как L^k , то это дает в результате: $L^k x_t = x_{t-k}$):

$$A(L)X_t = \alpha + \varepsilon_t,$$

где $A(L) = I - A_1L - \dots - A_pL^p$.

Условие слабой стационарности такой VAR-модели состоит в следующем [5]: все корни матричного характеристического многочлена процесса $VAR(p)$ $\det(I - zA_1 - \dots - z^pA_p)$ (т. е. корни уравнения $\det A(z) = 0$) лежат за пределами единичного круга на комплексной плоскости (модули всех корней больше единицы).

Если это условие выполняется, то при продвижении вперед по оси времени система постепенно «забывает» о том, при каких начальных значениях она начала реализовываться. Стабильное состояние системы находится путем приравнивания $L = 1$ и $\varepsilon_t = 0$. При этом получаем

$$A(1)X_t = \alpha,$$

так что стабильное состояние определяется как

$$X_t = A^{-1}(1)\alpha.$$

Необходимо заметить, что поскольку матрицы оцененных коэффициентов VAR затруднительно интерпретировать непосредственно, результаты оценивания VAR обычно представляют некоторыми функциями этих матриц. К таким статистикам относятся статистика теста причинности по Грэнжеру, функции реакции на импульсы и разложения ошибки прогноза.

С помощью статистики причинности Грэнжера определяют, помогают ли лаговые значения переменной, например X_{jt} , предсказывать другую переменную, X_{it} , при том условии, что используются запаздывающие значения всех остальных переменных, кроме X_{jt} . Статистика причинности по Грэнжеру — это F -статистика для проверки гипотезы о том, что запаздывающие значения j -й переменной могут быть исключены из i -го уравнения в приведенной форме VAR. Отклоне-

новременных уравнений, здесь можно использовать либо подход с частичной информацией, либо подход с полной информацией. Подход с частичной информацией сосредотачивается на идентификации коэффициентов при значениях X_t , относящихся к одному моменту времени, в отдельном уравнении. Подход с полной информацией сосредотачивается на идентификации коэффициентов во всех уравнениях, т. е. всех параметров системы.

Метод оценивания структурной VAR зависит от того, как именно идентифицирована B_0 . Подход с частичной информацией влечет использование методов оценивания для отдельного уравнения, таких как двухшаговый метод наименьших квадратов (Leamer, 1985). Подход с полной информацией влечет использование методов оценивания для нескольких уравнений, таких как трехшаговый метод наименьших квадратов (Watson, 1994). Специфичность методов оценивания по сравнению с СОУ состоит в том, что они должны учитывать ограничение ортогональности ошибок.

Не следует забывать о множественности различных типов VAR. Приведенная форма VAR единственная. Данному порядку переменных в X_t соответствует единственная рекурсивная VAR, но всего имеется $n!$ таких порядков, т. е. $n!$ различных рекурсивных VAR. Количество структурных VAR, т. е. наборов предположений, которые идентифицируют одновременные взаимосвязи между переменными, ограничено только изобретательностью исследователя.

ние этой гипотезы указывает на то, что данные лаги могут быть полезны для предсказания X_{it} .

Переходя к задаче прогнозирования, заметим, что поскольку лаги исследуемых переменных полагаются известными величинами, то построение прогнозов по ним в гораздо меньшей степени, чем в системах одновременных уравнений, осложняется проблемой получения точных значений факторов. Кроме того, построение прогнозов не требует знания структурной формы модели. Таким образом, чтобы построить прогноз, достаточно оценить приведенную форму без наложения ограничений обычным МНК. Это делает VAR очень удобным инструментом прогнозирования: не требуется анализировать, как взаимосвязаны переменные, какая переменная на какую влияет¹.

Если условие стационарности выполнено и случайное возмущение ε_t обладает свойствами «белого шума», то уравнения модели VAR(p) можно оценивать обычным методом наименьших квадратов. Причем каждое уравнение можно оценивать отдельно, т. е. строить регрессию каждого компонента на предыдущие значения всех компонентов, включая его собственные предыдущие значения². Таким образом, оценивание моделей VAR(p) требует только многократного применения метода наименьших квадратов и легко реализуемо в практических ситуациях. В качестве исходной информации достаточно задать список переменных и число лагов (выбранное из указанных выше соображений).

Одним из важных препятствий при практическом применении VAR-моделей является очень большое число подлежащих оцениванию параметров (такая ситуация называется перепараметризацией VAR)³. Эта особенность затрудняет широкое применение моделей VAR.

В данной статье отражены результаты проверки возможности моделирования динамики развития российского фондового рынка при помощи модели VAR.

С целью изучения влияния различных системообразующих для отечественного фондового рынка факторов при проведении исследования были использованы следующие отражающие их статистические показатели:

- фондовые индексы рынков ценных бумаг тех стран, которые способны оказывать влияние на российскую ситуацию (для рассмотрения были отобраны индексы DJI — Dow-Jones 30 Industrials, NYA — NYSE Comp, NASD — Nasdaq Comp, XAX — AMEX Composite, FTSE — UK FTSE 100, CAC — France CAC 40, DAX — Germany DAX, NIKKEI — Japan Nikkei 225, TSE — Canada TSE 300 Comp, MIBTEL — Italy MIBTel, AEX — Netherlands AEX General, ASE — Greece

¹ При прогнозировании чрезвычайно важно гарантировать, чтобы модель продолжала описывать данные и в будущем, т. е. чтобы она оставалась устойчивой за пределами выборки. Опыт использования малых систем показывает, что двухмерные и трехмерные VAR очень часто оказываются неустойчивыми (Canova, 1994). Современные системы прогнозирования на основе VAR принимают во внимание изменение параметров во времени, чтобы уловить существенные тренды в коэффициентах.

² В этом случае нет корреляции регрессоров с возмущениями и, следовательно, нет никаких проблем с состоятельностью оценок. Кроме того, все переменные совершенно равноправны, и, поскольку все регрессоры предшествуют объясняемому переменным, не возникает проблем с экзогенностью.

³ При этом быстро сокращается количество степеней свободы, что приводит к оценкам с высокой дисперсией и соответственно неточным прогнозам. Один из способов контролировать количество параметров в больших VAR-моделях состоит в том, чтобы наложить общую структуру на коэффициенты, используя байесовские или эмпирические байесовские методы. По мере роста числа переменных проблемы с вычислениями и моделированием становятся очень сложными, но развиваются численные методы для работы с системами средней размерности (Gianni, Giannini, 1997).

General Share, ASX — Australia All Ordinaries, ATX — Austria ATX, BE500 — Bloomberg European 500 Index, BEL20 — Belgium BEL-20, BSE — India BSE 30, BUSP — Brazil Bovespa, BUX — Hungary BUX, CMA — Egypt CMA, CSE — Sri Lanka All Share, HEX — Finland Helsinki General, HSI — Hong Kong Hang Seng, IBC — Venezuela IBC, IGBM — Spain Madrid General, IGRA — Peru Lima General, IPC — Mexico IPC, IPSA — Chile IPSA, JKSE — Indonesia Jakarta Comp, JSE — Johannesburg All Share, KFX — Denmark KFX, KLSE — Malaysia KLSE Comp, KS11 — S. Korea Seoul Comp, KSE — Pakistan Karachi 100, Merval — Argentina MerVal, MID — SnP 400 MidCap, NZSE40 — N. Zealand NZSE 40, OEX — SnP 100 Index, PSE — Philippines PSE Comp, PX50 — Czech Republic, SAX — Slovakia SAX, SET — Thailand SET, SML — SnP 600 SmallCap, SPX — SnP 500 Index, SSEC — China Shanghai Comp, SSMI — Switzerland Swiss Mkt, STI — Singapore Straits Times, TA100 — Israel TA-100, WIG20 — Warsaw Stock Exchange, XU100 — Turkey ISE National-100);

- объявленные ставки по привлечению (MIBID) и размещению (MIBOR) межбанковских кредитов, в процентах годовых по рублевым вкладам (сроком на 1 день, от 2 до 7 дней, от 8 до 30 дней, от 31 дня до 90 дней);

- показатели рынка государственных ценных бумаг — объем и оборот операций (по рыночной стоимости), а также эффективный индикатор рыночного портфеля, отражающий усредненную доходность к погашению по всем выпускам (по ОФЗ — АД, ОФЗ — ФД, ОФЗ — ПД, и ГКО — ОФЗ в целом);

- биржевой курс и объем торгов на ММВБ по доллару США и евро;

- котировки драгоценных металлов (золото, серебро, платина, палладий) на LONDON FIX (в долл. США за тройскую унцию);

- ежедневные цены фьючерсного контракта на нефть NYMEX Light Sweet Crude Oil с ближайшей датой поставки (в долл. США за баррель).

Всего было отобрано 79 показателей.

Существенным моментом при выборе массива исходных данных является необходимость исследования имеющихся наблюдений на предмет однородности, т. е. выяснение вопроса о схожести условий экономической активности на протяжении изучаемого временного интервала, а также о неизменности способов оценивания параметров и инструментов (в противном случае требовалось бы выделение периодов однородности и раздельное моделирование каждого из подобных периодов). Кроме того, следует учитывать тесную связь протяженности интервала прогнозирования с временным интервалом, использованным при моделировании. Принято считать, что на каждую прогнозную оценку должно приходиться не менее 10 (в некоторых источниках — трех) исходных наблюдений (Лугачев, Ляпунов, 1999; Теория статистики, 2002). Исходя из приведенных соображений, при решении задачи прогнозирования развития российского фондового рынка в качестве исходного был взят промежуток времени с января 2003 г. по август 2005 г., а в качестве прогнозного — с сентября по ноябрь 2005 г.¹

Для вычисления значений указанных факторов использовались следующие информационные ресурсы глобальной сети Интернет:

<http://export.rbc.ru> — информация, предоставляемая аналитическим агентством «РосБизнесКонсалтинг»;

<http://www.cbr.ru> — данные, раскрываемые Банком России;

<http://www.kitco.com> — сведения о котировках LONDON FIX из базы данных компании Kitco Inc.;

<http://www.eia.doe.gov> — материалы Министерства энергетики США.

¹ Значения индекса российского фондового рынка были получены из архива, хранящегося на FTP-сервере РТС (<ftp://ftp.rtsnet.ru/pub/info/stats/>).

Как уже отмечалось, общим условием, позволяющим получить более адекватные и стабильные результаты при построении статистических моделей, является требование однородности исходной информации. В частности, для применения корреляционного анализа необходимо, чтобы все рассматриваемые переменные были случайными и имели нормальный закон распределения.

С другой стороны, при наличии тенденции в течение достаточно длительного периода большая часть суммы квадратов отклонений связана с трендом. Соответственно если два признака имеют тренды с одинаковым направлением изменения уровней, то между значениями этих признаков будет наблюдаться положительная корреляция (при том что одинаковая направленность трендов вовсе не означает причинной зависимости — случай «ложной корреляции»).

С целью корректного измерения корреляции временных рядов (в общем случае — с целью преобразования временных рядов к стационарному виду) был использован прием, состоящий в переходе от исходных уровней к цепным показателям рядов, которые являются константами их трендов (например, для линейных трендов — это цепные абсолютные приросты, для показательных трендов — логарифмы цепных темпов роста и т. п.).

Указанным способом были обработаны все исходные временные ряды¹. В качестве примера можно привести описание процесса получения стационарного ряда на основе уровней индекса Доу-Джонса (DJI).

На первом этапе была предпринята попытка определить форму тренда для исходного временного ряда значений DJI. В соответствии с критерием минимума дисперсии остаточного компонента выбор был остановлен на показательной форме. Внешний вид графика индекса DJI и рассчитанных значений тренда представлен на рис. 1.

После этого, в соответствии с описанным выше приемом, для перехода от исходных значений индекса DJI к стационарному временному ряду была исполь-



Рис. 1. График значений индекса Dow-Jones 30 Industrials на интервале моделирования

¹ При написании настоящей статьи рассматривалось достаточно большое число возможных преобразований. Ниже представлен вариант, обеспечивший наилучшие результаты с точки зрения точности прогнозирования.

зована операция взятия «логарифмической прибыли» (т. е. были вычислены логарифмы цепных темпов роста) с последующим вычитанием ее выборочного среднего значения. Адекватность такой модели подтверждается анализом выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций остаточного компонента (изображенных на рис. 2, 3).

Аналогичным образом были выполнены преобразования для всех остальных используемых факторов, после чего была осуществлена проверка стационарно-

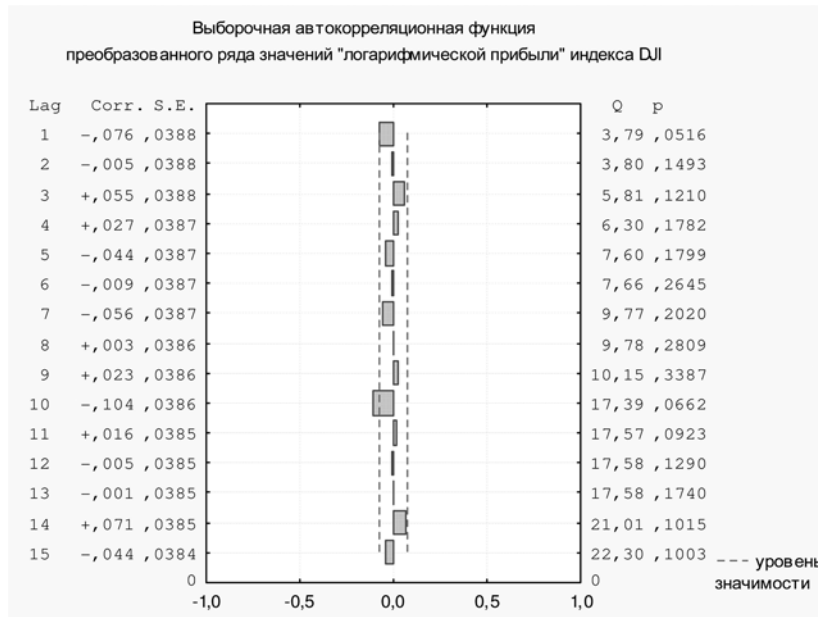


Рис. 2. Выборочная автокорреляционная функция преобразованного ряда значений «логарифмической прибыли» индекса Dow-Jones 30 Industrials

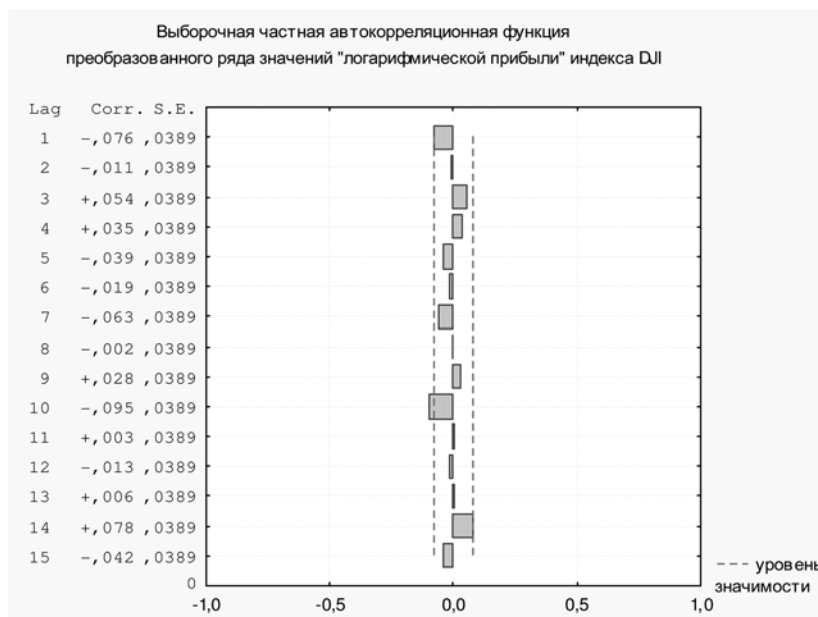


Рис. 3. Выборочная частная автокорреляционная функция преобразованного ряда значений «логарифмической прибыли» индекса Dow-Jones 30 Industrials.

сти модифицированных временных рядов. В последующем изложении результатов применения метода VAR под временными рядами значений тех или иных показателей понимаются именно эти преобразованные ряды.

После того как временные ряды всех рассматриваемых показателей были приведены к стационарному виду, осуществлялось построение многофакторной модели VAR.

Заметим, что процедура определения числа лагов для входящих в модель переменных сопровождалась построением нескольких моделей и выбором наилучшей из них. Использование информационных критериев Акаике и Шварца позволило получить согласованную оценку для величины лагов, равную 1.

С учетом найденной величины лага, после отбора переменных¹ была построена модель VAR. Для статистической зависимости индекса РТС от объясняющих признаков в составе модели VAR было получено следующее уравнение

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 0,0006 + 0,0660y(t-1) + 0,1094x_1(t-1) - 0,3132x_2(t-1) + \\
 & + 0,0203x_3(t-1) - 0,0424x_4(t-1) + 0,0435x_5(t-1) - 0,0833x_6(t-1) + \\
 & + 0,0019x_7(t-1) - 0,0068x_8(t-1) + 0,1228x_9(t-1) - 0,0365x_{10}(t-1) - \\
 & - 0,1659x_{11}(t-1) + 0,0408x_{12}(t-1) + 0,1657x_{13}(t-1) - 0,1926x_{14}(t-1) - \\
 & - 0,1491x_{15}(t-1) + 0,2679x_{16}(t-1) + 0,0853x_{17}(t-1) + 0,1083x_{18}(t-1) - \\
 & - 0,0207x_{19}(t-1) + 0,0747x_{20}(t-1) - 0,1747x_{21}(t-1) + 0,1192x_{22}(t-1) + \\
 & + 0,0866x_{23}(t-1) + 0,0081x_{24}(t-1) - 0,0854x_{25}(t-1) - 0,0579x_{26}(t-1) - \\
 & - 0,0130x_{27}(t-1) + 0,2625x_{28}(t-1) + 0,0126x_{29}(t-1),
 \end{aligned}$$

где y — индекс РТС; x_1 — эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ — АД; x_2 — эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО — ОФЗ; x_3 — котировка по серебру; x_4 — индекс AEX; x_5 — индекс ASE; x_6 — индекс ATX; x_7 — индекс BEL20; x_8 — индекс BSE; x_9 — индекс BUSP; x_{10} — индекс BUX; x_{11} — индекс CAC; x_{12} — индекс DAX; x_{13} — индекс FTSE; x_{14} — индекс HEX; x_{15} — индекс HIS; x_{16} — индекс IGBM; x_{17} — индекс IGRA; x_{18} — индекс IPC; x_{19} — индекс JSE; x_{20} — индекс KFX; x_{21} — индекс MIBTEL; x_{22} — индекс MID; x_{23} — индекс NIKKEI; x_{24} — индекс PX50; x_{25} — индекс SML; x_{26} — индекс SSMI; x_{27} — индекс TA100; x_{28} — индекс TSE; x_{29} — индекс XU100.

Более подробные сведения о статистических характеристиках построенной модели содержатся в табл. 1, 2.

Таблица 1

Статистические показатели уравнения модели VAR с индексом РТС
в качестве зависимой переменной

R^2	0,0954
Скорректированный \tilde{R}^2	0,0522
Значение F -критерия	2,2075
Стандартная ошибка	0,0169
Число наблюдений	660

¹ Исходное множество 79 переменных определено выше. Отбор окончательного набора участвующих в модели признаков производился на основе применения информационных критериев.

Продолжение таблицы 1

Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение <i>t</i> -критерия	Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение <i>t</i> -критерия
Свободный член	0,0006	0,0007	0,8232	Индекс HSI	-0,1491	0,0850	-0,7535
Индекс РТС	0,0660	0,0413	1,5988	Индекс IGBM	0,2679	0,1819	1,4728
Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ — АД	0,1094	0,2178	0,5021	Индекс IGRA	0,0853	0,0815	1,0473
Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО — ОФЗ	-0,3132	0,2197	-0,4255	Индекс IPC	0,1083	0,0967	1,1200
Котировка по серебру	0,0203	0,0379	0,5353	Индекс JSE	-0,0207	0,0848	-0,2438
Индекс AEX	-0,0424	0,1577	-0,2689	Индекс KFX	0,0747	0,0978	0,7636
Индекс ASE	0,0435	0,0748	0,5819	Индекс MIBTEL	-0,1747	0,1964	-0,8898
Индекс ATX	-0,0833	0,0996	-0,8366	Индекс MID	0,1192	0,2610	0,4568
Индекс BEL20	0,0019	0,1349	0,0142	Индекс NIKKEI	0,0866	0,0679	1,2762
Индекс BSE	-0,0068	0,0556	-0,1227	Индекс PX50	0,0081	0,0781	0,1035
Индекс BUSP	0,1228	0,0510	2,4093	Индекс SML	-0,0854	0,2143	-0,3983
Индекс BUX	-0,0365	0,0638	-0,5719	Индекс SSMI	-0,0579	0,1395	-0,4149
Индекс SAC	-0,1659	0,2059	-0,8056	Индекс TA100	-0,0130	0,0668	-0,1942
Индекс DAX	0,0408	0,1095	0,3726	Индекс TSE	0,2625	0,1471	1,7846
Индекс FTSE	0,1657	0,1554	1,0666	Индекс XU100	0,0126	0,0354	0,3552
Индекс HEX	-0,1926	0,0700	-0,7525				

Таблица 2

Оценки коэффициентов уравнений модели VAR¹

Показатель	Индекс РТС	Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ — АД	Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО — ОФЗ	Котировка по серебру	Индекс AEX	Индекс ASE	Индекс ATX	Индекс BEL20	Индекс BSE	Индекс BUSP
Свободный член	0,0006	-0,0004	-0,0004	-0,0007	0,0000	0,0007	0,0013	0,0006	0,0010	0,0014
Индекс РТС	0,0660	-0,0013	0,0166	0,0141	0,0042	-0,0012	-0,0057	-0,0025	0,0201	-0,0232
Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ — АД	0,1094	0,2434	0,2814	-0,0492	0,1656	0,0974	-0,0619	0,1281	-0,2101	0,1131
Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО — ОФЗ	-0,3132	-0,0351	-0,0728	0,1430	-0,0959	-0,0231	0,0480	-0,0955	0,1768	-0,1630
Котировка по серебру	0,0203	-0,0079	-0,0119	-0,0580	-0,0129	0,0259	0,0286	-0,0258	0,0577	0,0221

¹ Таблица содержит матричное представление всех уравнений модели VAR. В столбцах таблицы (в три ряда) перечислены зависимые переменные модели, в ее строках — независимые, в качестве которых выступают те же самые показатели, взятые с лагом, равным 1. Каждый элемент таблицы представляет собой коэффициент, с которым независимая переменная входит в уравнение.

Продолжение таблицы 2

Показатель	Индекс PTC	Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ – АД	Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО – ОФЗ	Котировка по серебру	Индекс АЕХ	Индекс ASE	Индекс АТХ	Индекс BEL20	Индекс BSE	Индекс BUSP
Индекс АЕХ	-0,0424	0,0919	0,1278	-0,0846	-0,0341	-0,0251	0,0184	0,1289	0,0705	0,1776
Индекс ASE	0,0435	-0,0323	-0,0322	-0,0651	-0,0167	0,0856	0,0418	-0,0236	-0,1108	-0,0334
Индекс АТХ	-0,0833	-0,0820	-0,0900	0,1623	-0,0502	-0,0923	-0,0200	-0,0447	0,0459	-0,0538
Индекс BEL20	0,0019	0,0442	0,0596	-0,0590	0,3182	0,1014	0,1058	0,1802	-0,0030	0,0639
Индекс BSE	-0,0068	-0,0180	-0,0245	-0,0227	0,0152	-0,0156	0,0395	-0,0009	-0,0009	0,0974
Индекс BUSP	0,1228	-0,0482	-0,0593	0,0555	0,0041	-0,0401	0,0273	0,0198	-0,0206	0,0157
Индекс BUX	-0,0365	0,0816	0,0651	-0,1316	-0,0309	-0,0240	-0,0090	-0,0208	0,0009	0,0597
Индекс САС	-0,1659	0,0214	0,0001	0,3570	-0,1101	-0,3471	-0,2978	-0,1127	-0,3536	0,1141
Индекс DAX	0,0408	-0,0618	-0,0673	-0,2130	0,0253	0,1468	-0,0083	-0,0616	0,1512	-0,0486
Индекс FTSE	0,1657	-0,0312	-0,0888	0,1924	-0,4846	-0,1697	-0,1684	-0,3647	-0,0986	-0,1925
Индекс HEX	-0,1926	0,0417	0,0237	-0,0087	-0,1007	-0,0526	-0,0101	-0,0322	0,0292	0,1018
Индекс HSI	-0,1491	-0,0365	-0,0432	0,0275	0,0612	-0,0179	-0,0565	0,0392	-0,0080	-0,1760
Индекс IGBM	0,2679	-0,1284	-0,1017	-0,0273	-0,0133	-0,0082	0,1253	-0,0250	0,3001	0,1321
Индекс IGRA	0,0853	-0,0461	-0,0179	0,4902	-0,1130	-0,0297	-0,0913	-0,0824	-0,1065	-0,0576
Индекс IPC	0,1083	0,0689	0,0654	0,0851	0,0779	-0,0045	0,0574	0,0520	-0,0185	-0,0887
Индекс JSE	-0,0207	-0,0521	-0,0678	-0,0597	0,1134	0,0272	0,0843	0,0957	0,2217	-0,0790
Индекс KFX	0,0747	0,1047	0,1304	0,0159	0,0493	0,0463	-0,0178	0,0321	0,0720	-0,0096
Индекс MIBTEL	-0,1747	0,0862	0,0641	-0,2540	-0,1796	0,0731	0,1269	-0,0943	-0,2095	-0,4410
Индекс MID	0,1192	0,1045	0,1121	-0,0100	0,3742	0,7331	0,1023	0,0227	-0,1840	-0,2693
Индекс NIKKEI	0,0866	0,0726	0,0699	0,0321	0,0285	0,0249	0,0033	0,0044	0,0236	0,0092
Индекс PX50	0,0081	-0,0940	-0,1072	0,0582	0,1071	0,1494	0,0964	0,0917	-0,0443	0,0119
Индекс SML	-0,0854	0,0069	0,0032	-0,2116	0,0250	-0,3186	0,0537	0,1603	0,3125	0,2378
Индекс SSMI	-0,0579	0,0101	0,0353	-0,1379	0,1996	0,1007	0,0589	0,1958	0,0268	-0,0779
Индекс ТА100	-0,0130	-0,0152	-0,0279	0,1104	-0,0068	0,0449	-0,0120	-0,0349	-0,0208	0,0281
Индекс TSE	0,2625	-0,0956	-0,0794	0,6084	-0,0482	-0,0229	0,0129	-0,0099	0,1224	0,3797
Индекс XU100	0,0126	-0,0117	-0,0107	-0,0001	0,0091	-0,0004	0,0081	0,0257	0,0231	-0,0247

Показатель	Индекс BUX	Индекс САС	Индекс DAX	Индекс FTSE	Индекс HEX	Индекс HSI	Индекс IGBM	Индекс IGRA	Индекс IPC	Индекс JSE
Свободный член	0,0013	0,0004	0,0006	0,0003	0,0001	0,0004	0,0005	0,0012	0,0012	0,0006
Индекс PTC	0,0453	0,0148	-0,0036	0,0158	0,0285	-0,0212	-0,0010	0,0261	-0,0036	-0,0189
Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ – АД	-0,1074	0,1557	0,2453	0,0529	0,1673	0,0068	0,1264	-0,0427	0,1684	0,0403
Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО – ОФЗ	0,1875	-0,0904	-0,1146	-0,0019	-0,1348	0,0021	-0,0823	-0,0228	-0,1861	-0,0439
Котировка по серебру	0,0204	-0,0153	-0,0083	-0,0036	0,0198	0,0301	-0,0064	0,0126	0,0197	0,0369
Индекс АЕХ	-0,0213	0,0958	0,1010	-0,0174	-0,0679	0,0159	0,0426	-0,0609	0,1551	0,1410
Индекс ASE	-0,0050	0,0086	-0,0123	-0,0325	-0,0466	0,0354	-0,0121	0,0320	-0,0334	-0,0338
Индекс АТХ	0,1035	-0,0475	-0,0517	-0,0304	-0,0241	-0,0999	-0,0126	-0,0260	-0,0583	-0,0053
Индекс BEL20	0,0702	0,1813	0,1890	0,2407	0,2305	-0,0103	0,1265	0,1311	0,0490	0,0125
Индекс BSE	-0,0307	0,0190	0,0301	0,0301	0,0117	0,0275	0,0207	0,0365	0,0522	0,0183
Индекс BUSP	0,0591	0,0073	-0,0091	0,0089	0,0032	0,0210	-0,0012	0,0314	0,0454	0,0260
Индекс BUX	-0,0719	-0,0447	-0,0372	-0,0528	-0,0485	-0,0304	-0,0531	0,0232	-0,0087	-0,0140
Индекс САС	-0,3109	-0,2318	-0,1227	0,0066	-0,1180	-0,2113	-0,2288	-0,0459	-0,1047	-0,1153
Индекс DAX	0,0959	0,0119	-0,2168	-0,0029	0,0614	0,0419	-0,0167	0,0447	-0,0657	-0,0986
Индекс FTSE	-0,0538	-0,2434	-0,3167	-0,4396	-0,2447	0,1575	-0,2102	-0,0915	-0,1797	-0,1672
Индекс HEX	0,0180	-0,0532	-0,0447	-0,0773	0,0072	-0,0012	-0,0216	0,0088	0,0094	0,0059

Окончание таблицы 2

Показатель	Индекс BUX	Индекс SAC	Индекс DAX	Индекс FTSE	Индекс HEX	Индекс HSI	Индекс IGBM	Индекс IGRA	Индекс IPC	Индекс JSE
Индекс HSI	-0,0617	0,0295	0,0916	0,0182	0,0797	0,0178	0,0288	-0,0595	-0,0336	0,0345
Индекс IGBM	0,0188	-0,0570	0,0871	-0,1041	0,1449	0,0644	0,0228	-0,1703	0,1037	0,1426
Индекс IGRA	-0,0607	-0,1020	-0,0608	-0,0788	-0,0089	-0,0127	-0,0497	0,1645	-0,0831	0,0144
Индекс IPC	0,0510	0,0661	0,1089	0,0159	0,0062	-0,0127	0,0523	0,0225	0,0335	-0,0120
Индекс JSE	0,0291	0,0802	0,0988	0,0907	0,0821	-0,0200	0,0608	0,0359	-0,0068	0,0129
Индекс KFX	0,0309	0,0487	0,0107	0,0231	0,0370	0,1000	0,0231	-0,0657	-0,0403	-0,0130
Индекс MIBTEL	0,1020	-0,1429	-0,2154	-0,0716	-0,2749	0,0173	-0,0274	0,0466	-0,1237	-0,0361
Индекс MID	0,0790	0,2799	0,1441	0,3743	0,4572	0,2435	0,2461	0,0901	0,0476	0,2750
Индекс NIKKEI	-0,0534	0,0083	0,0446	-0,0127	-0,0320	-0,0481	0,0017	0,0263	-0,0307	0,0458
Индекс PX50	0,0716	0,0632	0,0856	0,0606	0,0051	0,0634	0,0734	-0,0120	0,0422	0,0762
Индекс SML	0,1335	0,0600	0,1536	-0,0548	-0,0304	0,1024	0,0045	-0,0610	-0,0487	-0,0364
Индекс SSMI	-0,0546	0,1396	0,2393	0,1861	0,0520	0,0199	0,1127	0,1147	0,0607	0,0374
Индекс TA100	-0,0256	0,0050	0,0290	0,0142	-0,0386	-0,0682	0,0186	-0,0000	0,0215	-0,0069
Индекс TSE	0,0189	-0,0293	-0,0665	0,0038	0,0137	-0,0528	0,0106	0,1196	0,1941	0,0737
Индекс XU100	-0,0034	0,0081	-0,0235	0,0061	-0,0075	0,0152	0,0073	0,0091	0,0231	-0,0079

Показатель	Индекс KFX	Индекс MIBTEL	Индекс MID	Индекс NIKKEI	Индекс PX50	Индекс SML	Индекс SSMI	Индекс TA100	Индекс TSE	Индекс XU100
Свободный член	0,0007	0,0004	0,0007	0,0002	0,0012	0,0009	0,0003	0,0011	0,0007	0,0017
Индекс РТС	0,0249	0,0094	-0,0245	0,0443	0,0047	-0,0148	0,0116	0,0142	-0,0019	-0,0014
Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ – АД	0,0750	0,1268	0,1795	-0,2230	0,1656	0,1537	0,1776	0,0268	0,1050	-0,0181
Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО – ОФЗ	-0,0681	-0,0950	-0,1632	0,1860	-0,1937	-0,1205	-0,0905	-0,0262	-0,1044	-0,0123
Котировка по серебру	0,0088	-0,0180	-0,0089	0,0095	0,0147	-0,0114	-0,0043	-0,0259	-0,0121	-0,0350
Индекс AEX	-0,0812	-0,0286	0,0648	0,1253	0,0041	0,0676	0,0791	-0,0059	0,0394	0,1868
Индекс ASE	-0,0084	-0,0017	-0,0216	0,0250	0,0077	-0,0235	-0,0067	-0,0134	-0,0231	-0,0440
Индекс ATX	-0,0243	-0,0150	-0,0494	-0,0383	0,0360	-0,0425	-0,0772	-0,0347	-0,0009	-0,0940
Индекс BEL20	0,2380	0,1384	0,0368	-0,1207	0,0968	0,0287	0,1621	-0,0490	0,0419	-0,3740
Индекс BSE	0,0331	0,0228	0,0495	0,0172	0,0045	0,0541	0,0188	0,0332	0,0307	0,0618
Индекс BUSEP	0,0302	0,0106	0,0413	-0,0113	0,0599	0,0428	-0,0192	-0,0118	0,0136	0,0967
Индекс BUX	-0,0278	-0,0233	0,0069	-0,0686	-0,0230	0,0123	0,0064	-0,1229	-0,0154	-0,1731
Индекс SAC	-0,1185	-0,1430	0,0962	0,0007	-0,1236	0,0577	-0,1250	-0,0962	0,0228	-0,2515
Индекс DAX	0,0789	0,0285	-0,1024	-0,0121	-0,0281	-0,0958	0,0489	0,0403	-0,0028	0,0598
Индекс FTSE	0,0212	-0,1917	-0,1196	0,0358	-0,1311	-0,1025	-0,2163	-0,1708	-0,1054	-0,0328
Индекс HEX	-0,0284	-0,0116	-0,0046	0,0040	-0,0194	-0,0062	-0,0704	-0,0399	-0,0166	-0,0572
Индекс HSI	-0,0399	0,0326	0,0211	0,0799	0,0112	-0,0103	0,0507	-0,0095	-0,0322	-0,1634
Индекс IGBM	-0,0647	-0,0641	0,1071	0,0014	0,0480	0,1432	0,0074	0,0414	-0,0339	0,2219
Индекс IGRA	-0,0830	-0,0729	-0,0046	-0,0281	0,0458	-0,0243	-0,0618	-0,0213	-0,0041	0,0874
Индекс IPC	-0,0287	0,0327	0,0120	-0,0428	-0,0398	-0,0280	0,0463	-0,0118	0,0116	0,0671
Индекс JSE	-0,0142	0,0507	0,0065	0,0044	0,0137	0,0181	0,1051	0,0329	-0,0035	0,0157
Индекс KFX	0,0716	-0,0058	-0,0702	0,0541	0,0007	-0,0596	0,0615	0,0026	0,0093	-0,0649
Индекс MIBTEL	-0,2238	0,0111	-0,1805	0,0648	-0,0457	-0,1957	-0,1056	0,0727	-0,0872	0,2738
Индекс MID	0,1160	0,2018	-0,1493	0,2225	0,1856	-0,0183	0,3335	0,3226	0,0157	-0,1622
Индекс NIKKEI	-0,0165	0,0027	0,0017	-0,1071	0,0069	0,0107	-0,0241	0,0136	0,0313	-0,0031
Индекс PX50	0,0475	0,0549	0,0494	0,1135	0,0776	0,0431	0,0433	0,0278	-0,0258	0,0888
Индекс SML	0,1307	-0,0018	0,0670	0,2835	0,0257	-0,0532	0,0002	0,0059	0,0119	0,3484
Индекс SSMI	0,0880	0,1323	0,0587	-0,0499	0,0613	0,0702	-0,0106	0,1729	0,0590	-0,0878
Индекс TA100	-0,0274	0,0053	0,0229	-0,0451	-0,0497	0,0182	-0,0073	0,0220	-0,0005	0,0587
Индекс TSE	0,0292	0,0154	0,0790	-0,1043	0,0327	0,1459	-0,0598	-0,0685	0,0416	-0,0391
Индекс XU100	0,0142	0,0098	-0,0055	0,0095	0,0036	-0,0119	-0,0090	0,0273	0,0088	-0,0431

О стабильном характере поведения рядов, связанных построенной моделью VAR, свидетельствуют корни ее матричного характеристического многочлена, минимальный по модулю из которых равен 2,6977.

Анализ статистики причинности по Грэнжеру показывает, что предсказывать значения индекса РТС на уровне значимости 5% помогают индексы BUSP, TSE, XU100 (табл. 3).

Таблица 3

Тест причинности по Грэнжеру для VAR-модели прогнозирования значений индекса РТС¹

Регрессор	Вероятность отсутствия причинности по Грэнжеру для VAR-модели	
	Регрессор не является причиной (по Грэнжеру) для индекса РТС	Индекс РТС не является причиной (по Грэнжеру) для регрессора
Эффективный индикатор рыночного портфеля ОФЗ — АД	0,3439	0,0236
Эффективный индикатор рыночного портфеля ГКО — ОФЗ	0,1928	0,0053
Котировка по серебру	0,1396	0,6730
Индекс AEX	0,7885	0,7204
Индекс ASE	0,6221	0,5259
Индекс ATX	0,9372	0,5126
Индекс BEL20	0,6399	0,9796
Индекс BSE	0,9893	0,3721
Индекс BUSP	0,0370	0,9362
Индекс BUX	0,8167	0,1070
Индекс CAC	0,8109	0,8074
Индекс DAX	0,6021	0,7399
Индекс FTSE	0,9413	0,7107
Индекс HEX	0,4989	0,1821
Индекс HSI	0,4355	0,5215
Индекс IGBM	0,7410	0,6862
Индекс IGRA	0,1092	0,5559
Индекс IPC	0,1738	0,6511
Индекс JSE	0,9953	0,1792
Индекс KFX	0,7345	0,6354
Индекс MIBTEL	0,8541	0,7677
Индекс MID	0,1545	0,5019
Индекс NIKKEI	0,0361	0,0291
Индекс PX50	0,8344	0,0613
Индекс SML	0,2785	0,5765
Индекс SSMI	0,8947	0,6749
Индекс TA100	0,8235	0,8211
Индекс TSE	0,0468	0,3618
Индекс XU100	0,0109	0,5320

¹ В таблице показаны *P*-значения для *F*-тестов, состоящих в том, что лаги переменной из строки с пометкой «Регрессор» не входят в приведенную форму уравнения для зависимой переменной *y* (второй столбец) и что лаги переменной *y* не входят в приведенную форму уравнения, в котором в качестве зависимой переменной выступает переменная «Регрессор» (третий столбец).

После построения уравнений модели VAR было выполнено единовременное прогнозирование на 50 дней, а также исследование выборочной дисперсии ошибок прогноза при прогнозировании на 50 дней в соответствии с процедурой скользящего экзамена. Суть этой процедуры (известной в зарубежной литературе под названием *jackknife method* — «метод складного ножа») может быть описана следующим образом. Предположим, мы сравниваем q построенных для прогнозирования моделей. Принципиальным признаком этого подхода является требование постоянного обновления модели для определения прогнозной оценки каждой постпрогнозной точки. Будем считать, что выбрано $k = 50$ постпрогнозных точек, находящихся в конце временного ряда: y_{n-k+1}, \dots, y_n . В этом случае процедура скользящего экзамена состоит в следующем.

1. По первым $(n - k)$ наблюдениям исходного ряда оцениваются параметры первой модели в спецификации, определенной для прогнозирования $(n + 1)$ -й точки.
2. Построенная модель используется для оценки постпрогноза \hat{y}_{n-k+1} .
3. Оцениваются параметры модели по первым $(n - k + 1)$ наблюдениям исходного ряда и рассчитывается \hat{y}_{n-k+2} .
4. Расчеты повторяются до определения \hat{y}_n .
5. Оценивается мера качества прогноза

$$\hat{\sigma}^2(1) = \frac{1}{k - p - 1} \sum_{i=n-k+1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

6. Процедура повторяется для всех имеющихся q -моделей.
7. Последовательность $\hat{\sigma}^2(1), \dots, \hat{\sigma}^2(p)$ представляет собой значения частного критерия точности прогнозирования для всех рассматриваемых моделей.

Численные значения прогнозов приведены в табл. 8, графическая иллюстрация — на рис. 4, 5.

Общий недостаток традиционных статистических методов исключения тенденции заключается в том, что эти методы предполагают некоторую модификацию регрессионной модели путем либо замены переменных, либо добавления в эту модель фактора времени. Однако большая часть соотношений, постулируемых экономической теорией, сформулирована в терминах уровней временных рядов, а не их последовательных разностей или отклонений от трендов, и предполагает измерение взаимосвязи переменных без включения в модель каких-либо дополнительных факторов (например, переменной времени).

В ряде случаев наличие в одном из временных рядов тенденции может быть следствием именно того факта, что другой ряд, включенный в модель, тоже содержит тенденцию, а не просто являются результатом прочих случайных причин. Поэтому одинаковая или противоположная направленность тенденций рядов может иметь устойчивый характер и наблюдаться на протяжении длительного промежутка времени, а коэффициент корреляции, рассчитанный по уровням временных рядов, может соответственно не содержать ложной корреляции и характеризовать истинную причинно-следственную зависимость между ними.

Начиная с 80-х гг. XX в. высказанные предположения были положены в основу новой теории — *коинтеграции временных рядов*. Под коинтеграцией понимается причинно-следственная зависимость в уровнях двух (или более) временных рядов, которая выражается в совпадении или противоположной направленности их тенденций и случайной колеблемости.

В соответствии с этой теорией между двумя временными рядами существует коинтеграция в том случае, если линейная комбинация этих временных рядов есть стационарный временной ряд (то есть ряд, содержащий только случайную компоненту и имеющий постоянную дисперсию на длительном промежутке времени)¹.

Формальное определение коинтеграции двух переменных, разработанное Энглем и Грэнжером, состоит в следующем (Engle, Granger, 1987). Временные ряды x_t и y_t называются *коинтегрированными порядка d, b* , где $d \geq b \geq 0$, если:

- оба временных ряда *интегрированы порядка d* , т. е. каждый из них не является стационарным вплоть до $(d - 1)$ -кратного дифференцирования, но результаты d -кратного дифференцирования этих рядов являются стационарными;
- существует линейная комбинация этих переменных $\alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t$, которая интегрирована порядка $(d - b)^2$.

Вектор (α_1, α_2) называется *коинтегрирующим вектором*.

Определение коинтеграции естественным образом распространяется на случай нескольких коинтегрированных переменных произвольного порядка интегрирования. Компоненты k -мерного векторного процесса $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})$ называются *коинтегрированными порядка d, b* , где $d \geq b \geq 0$, если:

- каждая компонента x_{it} является интегрированной порядка d ($i = 1, \dots, k$);
- существует отличный от нуля вектор β , такой, что линейная комбинация $x_t \beta$ (так называемое *коинтегрирующее соотношение*) интегрирована порядка $(d - b)$.

Вектор β называется коинтегрирующим вектором³.

На практике наиболее интересна ситуация, когда ряды, трансформированные с помощью коинтегрирующего вектора, стационарны, $d = b$, а коинтегрирующие коэффициенты, составляющие коинтегрирующий вектор, могут быть определены на основе долгосрочной зависимости между переменными.

Удобным инструментом для моделирования нестационарных процессов и коинтеграции между ними является рассмотренная ранее векторная авторегрессия. Это вызвано тем, что свойство коинтеграции связано с представлением

¹ В основе понятия коинтеграции лежит идея о том, что в некоторых случаях отсутствие стационарности у многомерного процесса вызывается общим стохастическим трендом, который может быть устранен путем взятия определенной линейной комбинации компонентов процесса, в результате чего эта линейная комбинация будет стационарной.

В экономике и других приложениях статистики авторегрессионные процессы давно применяются для описания стационарных явлений, и идея описывать процесс, исходя из предшествующих значений, оказалась плодотворной для составления прогнозов. Если же мы хотим выявить связи между значениями переменных, относящихся к одному и тому же моменту времени, с целью понять взаимодействие экономических факторов, то мы получим гораздо больше информации, если будем сопоставлять значения той или иной переменной с одновременными ей значениями других переменных, а не с ее же прошлыми значениями. Можно сказать так: если нас интересуют соотношения между разными переменными, то следует рассматривать линейные комбинации значений, относящихся к одному моменту времени; если же нас интересует динамика эволюции переменных, то мы должны исследовать зависимости от прошлых значений.

Причина популярности понятия коинтеграции заключается в том, что классические экономические модели часто формулируются в виде линейных соотношений между одновременными значениями переменных. Несмотря на то что многие (может быть, даже большинство) экономические переменные нестационарны, теория таких уравнений была разработана для стационарных процессов. Если мы считаем классические соотношения в экономике устойчивыми, то легко представить себе, что эти соотношения могут быть стационарными, даже если сами переменные нестационарны. Коинтеграция представляет собой математическое отражение этого явления.

² Очевидно, что коинтегрированными могут быть только такие два временных ряда, которые являются интегрированными одинакового порядка.

³ Следует заметить, что в многомерном случае может существовать несколько линейно независимых коинтегрирующих векторов.

многомерного случайного процесса в виде линейной модели, причем особенно подходящим оказалось использование VAR-модели, а именно наличие или отсутствие коинтеграции можно установить по значениям характеристических корней VAR-модели¹.

Не следует воспринимать коинтеграцию как некоторое сугубо теоретическое свойство. Она играет весьма значительную роль при оценивании регрессий с нестационарными переменными. Оказывается, что в случае нестационарных, но коинтегрированных процессов МНК-оценка коэффициентов регрессии является состоятельной². Следовательно, несмотря на нестационарность переменных, можно применять обычные регрессионные методы. Более того, можно показать, что скорость сходимости такой оценки выше, чем в случае МНК-оценки для стационарных регрессий (это свойство МНК-оценок при наличии коинтеграции называют суперсостоятельностью).

Иными словами, коинтеграция двух временных рядов значительно упрощает процедуры и методы, используемые в целях их анализа, поскольку оказывается, что в этом случае можно строить состоятельные оценки коэффициентов уравнения регрессии и определять показатели корреляции, используя в качестве исходных данных непосредственно уровни изучаемых рядов, тем самым в полном объеме учитывая информацию, содержащуюся в исходных данных³.

В то же время следует отметить, что сама коинтеграция имеет место только для длительных промежутков времени (долгосрочной перспективы), тогда как в каждый фиксированный момент времени в регрессии по двум временным рядам, между которыми существует коинтеграция, можно выделить случайную ошибку (так называемую равновесную ошибку)⁴.

Очевидно, что при рассмотрении коротких временных рядов (краткосрочной перспективы) равновесное состояние может не достигаться, и коинтеграции между рядами может не быть. Поэтому каждый уровень временного ряда случайных ошибок (остатков) можно считать корректирующим компонентом, характеризующим степень достижения равновесного состояния динамики исходных рядов в долгосрочной перспективе. Основываясь на этих рассуждениях, было выдвинуто предположение о том, что на формирование уровней ряда результирующих показателей оказывают влияние два фактора — изменение, или цепные абсолютные приросты ряда объясняющей переменной и величина ошибки предыдущего периода. Такая модель называется *моделью корректировки посредством ошибок (ЕСМ)*⁵. В основе ЕСМ лежит идея долгосрочных стацио-

¹ Установлено, что если многомерный случайный процесс имеет представление в виде модели VAR(p) и все его характеристические корни по модулю превышают единицу, то количество коинтегрирующих линейно независимых векторов между компонентами процесса в точности равно рангу характеристической матрицы (этот показатель принято называть *коинтегрирующим рангом*) (Johnston, DiNardo, 1997). При этом вовсе не обязательно пользоваться VAR-моделью, важно лишь, чтобы многомерный процесс допускал VAR(p) представление.

² Заметим, что для применимости обычных тестовых процедур и таблиц распределений достаточно принципиальной возможности подходящей параметризации вовсе не требуется оценивать коэффициенты именно этой параметризации.

³ Однако поскольку коинтеграция означает совпадение динамики временных рядов в течение длительного промежутка времени, то сама эта концепция применима только к временным рядам, охватывающим сравнительно длительные промежутки времени. При наличии коротких временных рядов данных, даже если формальные критерии показали наличие их коинтеграции, моделирование взаимосвязей по уровням этих рядов может привести к неверным результатам ввиду нарушения предпосылок теории коинтеграции.

⁴ Само совпадение тенденций (коинтеграцию) рядов в долгосрочной перспективе принято называть их равновесным состоянием.

⁵ В этой модели (регрессии) используются первые разности исходных переменных и остатки из коинтеграционной регрессии, которые представляют корректирующий член модели.

нарных состояний экономической системы и корректирующего механизма, который возвращает экономическую систему к ее долгосрочному состоянию¹. Фактически с использованием ЕСМ можно в одном уравнении совместить краткосрочное и долгосрочное поведение (следует отметить, что ЕСМ имеет один и тот же вид как для стационарных, так и для нестационарных, но коинтегрированных переменных).

Таким образом, механизм корректировки посредством ошибок позволяет количественно охарактеризовать взаимосвязь между краткосрочной и долгосрочной динамикой во временных рядах экономических показателей. Впервые этот механизм был описан Сарганом (Sargan, 1984), дальнейшая его разработка и эмпирическая проверка проводились Энглом и Грэнжером.

Естественным первым шагом в анализе коинтеграции является выяснение факта ее присутствия в исходных данных. В настоящее время разработаны два основных теста на проверку коинтеграции. Метод Энгла и Грэнжера базируется на проверке стационарности оценок ошибок равновесия (Engle, Granger, 1987). Второй метод — процедура Йохансена — базируется на VAR-подходе (Johansen, 1991; Johansen, 1988; Johansen, Juselius, 1992).

Алгоритм тестирования коинтеграции, разработанный Энглом и Грэнжером, состоит из следующих шагов.

1. Проверка порядка интеграции включаемых в предполагаемую долгосрочную зависимость переменных².

2. Поиск коинтегрирующего вектора.

В общем случае определяется долгосрочная зависимость

$$y_t = \lambda_1 x_{1t} + \dots + \lambda_p x_{kt} + u_t.$$

Коинтегрирующий вектор $(1, -\lambda_1, \dots, -\lambda_k)$ находится методом наименьших квадратов.

3. Ошибки, полученные из приведенного коинтеграционного уравнения, проверяются на стационарность с использованием теста Дикки-Фуллера. Если остатки являются стационарным временным рядом, то исходные процессы коинтегрированы. В противном случае коинтеграция отсутствует. Если процессы коинтегрированы, то построенная на втором шаге регрессия называется коинтегрирующей.

Следует учитывать, что при расчете коинтеграционных коэффициентов распределение t -статистики зависит от количества оцениваемых коэффициентов и определяется специальными таблицами. Таблицы критических значений для

¹ Концепция коинтеграции и модель корректировки посредством ошибок тесно связаны. Показано, что если два нестационарных процесса коинтегрированы, то их связь можно представить в виде, определяемом моделью ЕСМ (Granger, 1981).

Можно привести следующее неформальное объяснение того, почему коинтеграция во временных рядах подразумевает модель корректировки посредством ошибок. Если исходные переменные коинтегрированы, то их коинтеграционное соотношение должно быть стационарным. Для того чтобы быть стационарным, оно должно колебаться вокруг постоянного среднего значения с постоянной дисперсией. Это подразумевает, что в случае отклонения от равновесного соотношения должны существовать силы (процесс корректировки ошибки), приводящие к равновесию. Иными словами, модели корректировки посредством ошибок моделируют коинтегрированный процесс и, по сути, включены в формальный результат, известный как представительная теорема Грэнжера (Engle, Granger, 1987).

² Если долгосрочная зависимость связывает только две переменные, обе они должны иметь одинаковый порядок интеграции.

Если количество объясняющих переменных больше, чем одна, порядок интеграции зависимой переменной не может быть выше, чем порядок интеграции любой из объясняющих переменных, порядок интеграции которых одинаков и выше, чем порядок интеграции зависимой переменной.

процедуры Энгла—Грэнжера были приведены в работе (MacKinnon, 1990). Они больше по абсолютной величине, чем критические значения статистики Дикки—Фуллера на том же уровне значимости. Поскольку нулевая гипотеза заключается в наличии единичного корня у ряда остатков, т. е. в отсутствии коинтеграции, критические значения смещены в сторону гипотезы о наличии коинтеграции.

Широко применяется еще один метод нахождения стационарных комбинаций нестационарных переменных — метод Йохансена (Johansen, 1991). Этот метод служит также для тестирования стационарности найденных линейных комбинаций и, по сути, распространяет методiku Дикки-Фуллера на случай векторной авторегрессии. Помимо оценивания коинтегрирующих векторов, метод Йохансена также позволяет проверять гипотезы о ранге коинтеграции (количестве линейно независимых коинтегрирующих векторов) и гипотезы о виде коинтегрирующих векторов.

По сравнению с методом Энгла—Грэнжера метод Йохансена имеет ряд преимуществ:

- метод Энгла—Грэнжера применим, только когда между нестационарными переменными есть всего одно коинтегрирующее соотношение (если ранг коинтеграции больше 1, то метод дает бессмысленные результаты);

- метод Энгла—Грэнжера статичен, в нем не учитывается краткосрочная динамика;

- результаты метода Йохансена не зависят от нормировки, использованной при оценивании, в то время как метод Энгла—Грэнжера может дать существенно отличающиеся результаты в зависимости от того, какая переменная стоит в левой части оцениваемой коинтеграционной регрессии.

Метод Йохансена основан на связи количества коинтегрирующих векторов с рангом специальной матрицы в VAR-представлении многомерного временного ряда. Первым шагом в реализации теста является оценка модели VAR(p) для заданного многомерного временного ряда. Следует заметить, что в эту модель добавлены векторы линейного тренда и допускается ненулевое математическое ожидание для каждой из компонент. Порядок модели p выбирают обычно с использованием информационных критериев Акаике и Шварца среди моделей, прошедших диагностику остатков (при переборе моделей включают/исключают также свободный член и линейный тренд). Возможно осуществление проверки гипотезы о том, что порядок VAR-модели равен p , против альтернативной гипотезы, что ранг равен $q < p$ (для проверки используется тест отношений правдоподобия) (Hamilton, 1994).

После оценки VAR-модели в тесте Йохансена рассчитывается оценка, соответствующая ЕСМ-представлению модели. Нулевой гипотезой является то, что ранг матрицы не превышает некоторого фиксированного числа r . В зависимости от формы спецификации альтернативной гипотезы для проверки нулевой гипотезы используются так называемые статистики «следа» или «максимального собственного значения»¹. Производится последовательный перебор значений r от 0 до k . Если нулевая гипотеза $r = 0$ не отвергается уже на первом шаге, то процесс нестационарный и коинтеграции не существует. Если гипотеза $r = 0$ отвергается, на следующем шаге проверяется гипотеза $r = 1$. Если она не отвергается, то коинтегрирующий ранг равен 1. Если же гипотеза отвергается, то переходим

¹ Распределения обеих тестовых статистик нестандартны, и их критические значения получены методом моделирования Монте-Карло. Таблицы критических значений зависят от того, входят ли детерминированный тренд и свободный член в VAR-уравнение, а линейный член — в коинтегрирующее соотношение.

к проверке нулевой гипотезы $r = 2$ и т. д. Стационарности исследуемого многомерного процесса соответствует отвержение нулевой гипотезы при всех $r < k$.

В случае положительного ответа на вопрос о коинтегрированности переменных следует приступать к оценке модели. В методе Йохансена предложена не только процедура тестирования коинтеграции, но и процедура оценивания коинтегрирующих векторов (методом максимального правдоподобия)¹.

В данной статье осуществляется проверка возможности моделирования динамики развития российского фондового рынка при помощи модели коинтеграции.

В соответствии с методом Энга—Грэнжера все участвующие в модели переменные, указанные выше, были исследованы на интегрированность и по результатам исследования идентифицированы как интегрированные ряды порядка 1. Затем методом наименьших квадратов была проведена оценка регрессии значений индекса РТС на значения некоторых из остальных переменных (а именно индексов CAC, DAX, FTSE, HEX, HSI, IGBM, IPC, NASD, PX50, SSMI²). Полученный ряд остатков был протестирован методом Дикки-Фуллера (по критическим значениям Энга—Грэнжера на 5%-ном уровне значимости). По результатам теста гипотеза некоинтегрированности рядов уверенно отвергается (вне зависимости от факта включения/невключения в модель константы и линейного тренда).

Прежде чем применять процедуру теста Йохансена, следует определиться с порядком p VAR-модели, которой следует векторный ряд. Как было указано выше, мы выбираем p с использованием информационного критерия Акаике среди VAR-моделей (в уровнях ряда), прошедших диагностику остатков. В результате мы остановились на статистической модели в виде VAR(2) для уровней ряда.

О стабильном характере поведения реализаций рядов, связанных построенной моделью VAR, свидетельствуют корни ее матричного характеристического многочлена, минимальный по модулю из которых равен 1,0008.

Опираясь на процедуру теста Йохансена, определялось количество линейно независимых коинтегрирующих векторов. Для этого вначале проверяется нулевая гипотеза об отсутствии векторов коинтеграции против альтернативной гипотезы о существовании одного такого вектора. Мы должны отвергнуть нулевую гипотезу, так как рассчитанное значение статистики «следа» равно 347,45 (критическое 5%-ное значение — 291,40). К аналогичному выводу приводит также анализ статистики «максимального собственного значения» (рассчитанное значение статистики равно 89,00, критическое 5%-ное значение — 69,74). Точно такие же результаты получаются в случае проверки гипотезы о существовании одного вектора против альтернативной гипотезы о том, что существуют два век-

¹ Серьезной практической проблемой является обнаружение нескольких коинтегрирующих векторов. Если существует лишь одно коинтегрирующее соотношение между компонентами вектора, его можно трактовать как долгосрочное равновесие между этими переменными. В случае нескольких коинтегрирующих соотношений существует несколько линейных комбинаций компонентов, которые являются стационарными. Поэтому становится очень сложно выявлять комбинации, допускающие возможность содержательной интерпретации в качестве экономического равновесия. В реальных экономических задачах важно, чтобы выбранные векторы выражали осмысленные с точки зрения экономической теории долговременные связи между рассматриваемыми переменными. Это, в свою очередь, требует наложения на коинтегрирующие векторы соответствующих идентифицирующих ограничений, позволяющих различать эти векторы, выделяя их из всего множества линейных комбинаций базисных векторов.

² Совокупность именно таких объясняющих переменных была отобрана на основании использования информационного критерия Акаике для результирующих моделей с различными комбинациями 79 переменных из числа указанных выше.

тора коинтеграции. Затем проверяется гипотеза о существовании двух векторов против альтернативной гипотезы о том, что существуют три вектора коинтеграции. Рассчитанный критерий оказывается меньше критического значения (как в случае статистики «следа», так и в случае статистики «максимального собственного значения»), и поэтому мы принимаем нулевую гипотезу. Такая же ситуация наблюдается и в случае с альтернативной гипотезой о четырех и более векторах. Таким образом, можно считать, что существует два коинтегрирующих вектора.

После оценивания ранга коинтеграции в рамках процедуры Йохансена мы получаем оценки максимального правдоподобия для двух линейно независимых коинтегрирующих векторов.

Имея оценку подходящих коинтегрирующих векторов, мы произвели оценивание коэффициентов ЕСМ¹. В рассматриваемом случае оцененная ЕСМ имеет вид (приведено только уравнение для первой разности значений индекса РТС)

$$\begin{aligned} y(t) - y(t-1) = & -0,0031e_1(t) - 0,0237e_2(t) + 0,0821(y(t-1) - y(t-2)) - \\ & - 0,0128(x_1(t-1) - x_1(t-2)) - 0,0051(x_2(t-1) - x_2(t-2)) + \\ & + 0,0239(x_3(t-1) - x_3(t-2)) - 0,0187(x_4(t-1) - x_4(t-2)) - \\ & - 0,0039(x_5(t-1) - x_5(t-2)) + 0,1508(x_6(t-1) - x_6(t-2)) + \\ & + 0,0081(x_7(t-1) - x_7(t-2)) + 0,0690(x_8(t-1) - x_8(t-2)) + \\ & + 0,0180(x_9(t-1) - x_9(t-2)) - 0,0136(x_{10}(t-1) - x_{10}(t-2)), \end{aligned}$$

где y — индекс РТС; x_1 — индекс САС; x_2 — индекс DAX; x_3 — индекс FTSE; x_4 — индекс HEX; x_5 — индекс HSI; x_6 — индекс IGBM; x_7 — индекс IPC; x_8 — индекс NASD; x_9 — индекс PX50; x_{10} — индекс SSMI.

Более подробные сведения о статистических характеристиках построенной модели содержатся в таблицах 4, 5.

Таблица 4

Статистические показатели уравнения модели ЕСМ с первой разностью значений индекса РТС в качестве зависимой переменной

R^2	0,0704
Скорректированный \tilde{R}^2	0,0531
Значение F -критерия	4,0766
Стандартная ошибка	9,6867
Число наблюдений	661

Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t -критерия	Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t -критерия
$e_1(t)$	-0,0031	0,0009	-0,5762	$x_5(t-1) - x_5(t-2)$	-0,0039	0,0035	-0,1228
$e_2(t)$	-0,0237	0,0111	-0,1455	$x_6(t-1) - x_6(t-2)$	0,1508	0,1230	1,2255
$y(t-1) - y(t-2)$	0,0821	0,0404	2,0338	$x_7(t-1) - x_7(t-2)$	0,0081	0,0047	1,7082
$x_1(t-1) - x_1(t-2)$	-0,0128	0,0306	-0,4189	$x_8(t-1) - x_8(t-2)$	0,0690	0,0244	2,8346
$x_2(t-1) - x_2(t-2)$	-0,0051	0,0191	-0,2659	$x_9(t-1) - x_9(t-2)$	0,0180	0,0461	0,3894
$x_3(t-1) - x_3(t-2)$	0,0239	0,0205	1,1634	$x_{10}(t-1) - x_{10}(t-2)$	-0,0136	0,0154	-0,8842
$x_4(t-1) - x_4(t-2)$	-0,0187	0,0064	-0,9207				

¹ При этом следует учитывать, что асимптотически нормальными являются лишь оценки краткосрочной динамики, т. е. коэффициенты при запаздывающих разностях переменных.

Таблица 5

Коэффициенты уравнений модели ЕСМ¹

	$y(t) - y(t-1)$	$x_1(t) - x_1(t-1)$	$x_2(t) - x_2(t-1)$	$x_3(t) - x_3(t-1)$	$x_4(t) - x_4(t-1)$	$x_5(t) - x_5(t-1)$	$x_6(t) - x_6(t-1)$	$x_7(t) - x_7(t-1)$	$x_8(t) - x_8(t-1)$	$x_9(t) - x_9(t-1)$	$x_{10}(t) - x_{10}(t-1)$
$e_1(t)$	-0,003	-0,007	-0,006	-0,003	-0,023	0,017	-0,001	-0,016	-0,003	-0,003	0,000
$e_2(t)$	-0,024	-0,128	0,006	-0,093	-0,308	0,172	-0,013	-0,076	-0,048	0,012	-0,014
$y(t-1) - y(t-2)$	0,082	0,101	-0,027	0,144	0,189	-0,005	0,002	-0,061	-0,071	0,026	0,149
$x_1(t-1) - x_1(t-2)$	-0,013	-0,074	-0,011	0,137	-0,099	-0,771	-0,029	-0,107	0,069	-0,024	-0,032
$x_2(t-1) - x_2(t-2)$	-0,005	-0,013	-0,186	-0,022	-0,013	0,177	-0,006	-0,178	-0,038	0,007	0,040
$x_3(t-1) - x_3(t-2)$	0,024	-0,122	-0,218	-0,317	-0,332	0,416	-0,024	-0,335	-0,073	-0,018	-0,161
$x_4(t-1) - x_4(t-2)$	-0,019	-0,038	-0,031	-0,070	-0,039	-0,035	-0,005	0,011	0,009	-0,008	-0,065
$x_5(t-1) - x_5(t-2)$	-0,004	0,006	0,024	0,004	0,024	-0,017	0,002	-0,026	0,013	0,000	0,012
$x_6(t-1) - x_6(t-2)$	0,151	-0,041	0,305	-0,243	0,907	1,331	0,066	2,019	0,177	0,008	0,230
$x_7(t-1) - x_7(t-2)$	0,008	0,013	0,027	0,014	-0,024	0,058	0,003	0,052	0,001	0,000	0,006
$x_8(t-1) - x_8(t-2)$	0,069	0,520	0,443	0,504	1,331	1,614	0,088	0,362	-0,064	0,089	0,651
$x_9(t-1) - x_9(t-2)$	0,018	0,126	0,249	0,177	0,022	0,539	0,048	0,498	0,049	0,117	0,198
$x_{10}(t-1) - x_{10}(t-2)$	-0,014	0,090	0,147	0,118	0,067	0,053	0,016	0,076	0,024	0,007	0,011

Коэффициенты $e_i(t)$ определяют долгосрочные соотношения между исходными переменными. При их расчете используются компоненты двух найденных коинтегрирующих векторов:

$$e_1(t) = 15\,358,799 + y(t-1) + 5,5234x_2(t-1) - 3,9217x_3(t-1) - 0,0928x_4(t-1) - 0,4596x_5(t-1) - 18,3714x_6(t-1) - 0,7106x_7(t-1) - 1,7335x_8(t-1) + 14,8198x_9(t-1) - 1,1507x_{10}(t-1),$$

$$e_2(t) = -1387,881 + x_1(t-1) - 0,5590x_2(t-1) + 0,1675x_3(t-1) + 0,0186x_4(t-1) - 0,0205x_5(t-1) + 1,1333x_6(t-1) + 0,0060x_7(t-1) + 0,4217x_8(t-1) - 0,9353x_9(t-1) - 0,3143x_{10}(t-1).$$

Более подробные сведения о статистических характеристиках коэффициентов построенных коинтегрирующих векторов содержатся в табл. 6, 7.

Таблица 6

Статистические показатели коэффициентов первого коинтегрирующего уравнения модели ЕСМ для $e_1(t)$ в качестве зависимой переменной

Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t-критерия	Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t-критерия
$y(t-1)$	1,0000	—	—	$x_6(t-1)$	-18,3714	7,2808	-2,5233
$x_1(t-1)$	0,0000	—	—	$x_7(t-1)$	-0,7106	0,2577	-2,7570
$x_2(t-1)$	5,5234	1,4629	3,7757	$x_8(t-1)$	1,7335	1,2432	1,3944
$x_3(t-1)$	-3,9217	1,0366	-3,7831	$x_9(t-1)$	14,8198	2,3980	6,1800
$x_4(t-1)$	-0,0928	0,2326	-0,3989	$x_{10}(t-1)$	-1,1507	0,6849	-1,6801
$x_5(t-1)$	-0,4596	0,1745	-2,6345	свободный член	15 358,799	3127,5732	4,9108

¹ Таблица содержит матричное представление всех уравнений модели ЕСМ. В столбцах таблицы перечислены зависимые переменные модели, в ее строках — независимые. Каждый элемент таблицы представляет собой коэффициент, с которым независимая переменная входит в уравнение для зависимой.

Таблица 7

**Статистические характеристики второго коинтегрирующего уравнения модели ЕСМ
для $e_2(t)$ в качестве зависимой переменной**

Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t -критерия	Показатель	Оценка	Стандартная ошибка	Значение t -критерия
$y(t-1)$	0,0000	—	—	$x_6(t-1)$	1,1333	0,4639	2,4430
$x_1(t-1)$	1,0000	—	—	$x_7(t-1)$	0,0060	0,0164	0,3643
$x_2(t-1)$	-0,5590	0,0932	-5,9971	$x_8(t-1)$	0,4217	0,0792	5,3233
$x_3(t-1)$	0,1675	0,0661	2,5357	$x_9(t-1)$	-0,9353	0,1528	-6,1213
$x_4(t-1)$	0,0186	0,0148	1,2532	$x_{10}(t-1)$	-0,3143	0,0436	-7,2016
$x_5(t-1)$	-0,0205	0,0111	-1,8449	свободный член	-1387,881	199,2828	-6,9644

После построения уравнений модели коинтеграции для временных рядов значений отобранных факторов было проведено исследование выборочной дисперсии ошибок прогноза при прогнозировании на 50 дней, а также в соответствии с процедурой скользящего экзамена.

Численные значения прогнозов приведены в табл. 8, графическая иллюстрация — на рис. 4, 5.

Таблица 8

Результаты прогнозирования индекса РТС на 50 дней

Дата	Индекс РТС	Прогноз методом векторной авторегрессии	Прогноз методом векторной авторегрессии с помощью процедуры скользящего экзамена	Прогноз методом коинтеграции	Прогноз методом коинтеграции с помощью процедуры скользящего экзамена
01.09.05	894,6	886,5	889,3	884,2	885,6
02.09.05	909,9	887,5	900,6	883,3	899,2
05.09.05	910,1	887,9	913,9	882,1	915,9
06.09.05	882,6	888,6	910,0	880,9	909,3
07.09.05	866,6	889,4	882,9	879,8	881,5
08.09.05	883,1	890,2	865,3	878,8	865,8
09.09.05	905,9	891,0	885,0	877,8	882,8
12.09.05	903,9	891,8	913,9	877,0	909,7
13.09.05	900,2	892,6	902,2	876,1	903,0
14.09.05	896,1	893,4	896,6	875,4	895,5
15.09.05	906,9	894,2	899,1	874,7	895,5
16.09.05	923,0	895,0	912,8	874,0	913,2
19.09.05	946,3	895,8	928,4	873,4	925,6
20.09.05	945,0	896,6	952,2	872,9	952,0
21.09.05	960,5	897,4	939,7	872,3	939,8
22.09.05	966,0	898,2	968,2	871,9	965,0
23.09.05	965,3	899,0	967,1	871,4	968,9
26.09.05	954,8	899,8	967,9	871,0	965,8
27.09.05	984,5	900,6	954,0	870,6	954,7
28.09.05	988,3	901,4	988,4	870,3	989,7
29.09.05	991,1	902,2	990,0	869,9	990,3
30.09.05	1007,8	903,0	992,1	869,6	993,3
03.10.05	1038,8	903,8	1010,0	869,4	1011,7
04.10.05	1045,0	904,6	1044,9	869,1	1040,8
05.10.05	1009,6	905,4	1039,3	868,9	1042,4

Окончание таблицы 8

Дата	Индекс РТС	Прогноз методом векторной авторегрессии	Прогноз методом векторной авторегрессии с помощью процедуры скользящего экзамена	Прогноз методом коинтеграции	Прогноз методом коинтеграции с помощью процедуры скользящего экзамена
06.10.05	954,6	906,2	994,7	868,6	1000,7
07.10.05	949,1	907,0	939,0	868,4	940,7
10.10.05	970,3	907,8	957,1	868,2	951,8
11.10.05	994,9	908,6	975,9	868,1	974,0
12.10.05	966,9	909,4	998,2	867,9	995,7
13.10.05	935,2	910,2	959,2	867,8	958,4
14.10.05	911,2	911,0	923,5	867,6	926,7
17.10.05	915,4	911,8	911,6	867,5	909,0
18.10.05	918,2	912,6	921,2	867,4	922,6
19.10.05	882,1	913,4	906,1	867,3	912,6
20.10.05	887,4	914,2	884,6	867,2	881,0
21.10.05	887,9	915,0	873,7	867,1	884,0
24.10.05	908,6	915,8	897,0	867,0	892,1
25.10.05	904,4	916,6	918,8	866,9	921,2
26.10.05	910,4	917,4	901,7	866,8	903,8
27.10.05	898,5	918,2	907,8	866,8	914,3
28.10.05	910,8	919,0	893,5	866,7	892,6
31.10.05	935,0	919,8	918,3	866,6	919,7
01.11.05	942,1	920,6	941,7	866,6	939,1
02.11.05	964,4	921,4	946,2	866,5	943,6
03.11.05	972,4	922,2	973,6	866,5	968,3
07.11.05	971,6	923,0	974,4	866,4	972,0
08.11.05	971,2	923,8	971,4	866,4	975,7
09.11.05	980,3	924,6	970,6	866,4	969,9
10.11.05	972,2	925,4	981,0	866,3	981,7
Сумма квадратов ошибок за 50 дней		143 751	12 408	338 839	13 956

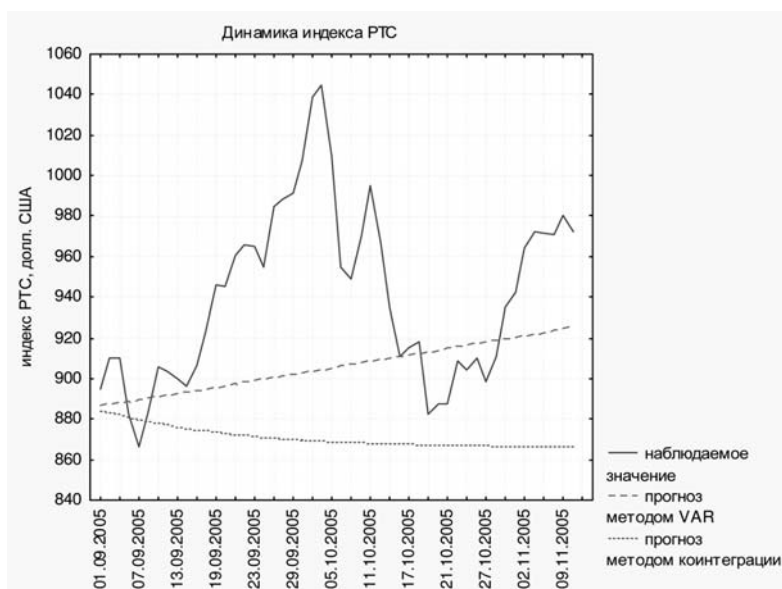


Рис. 4. Прогнозирование индекса РТС на 50 дней

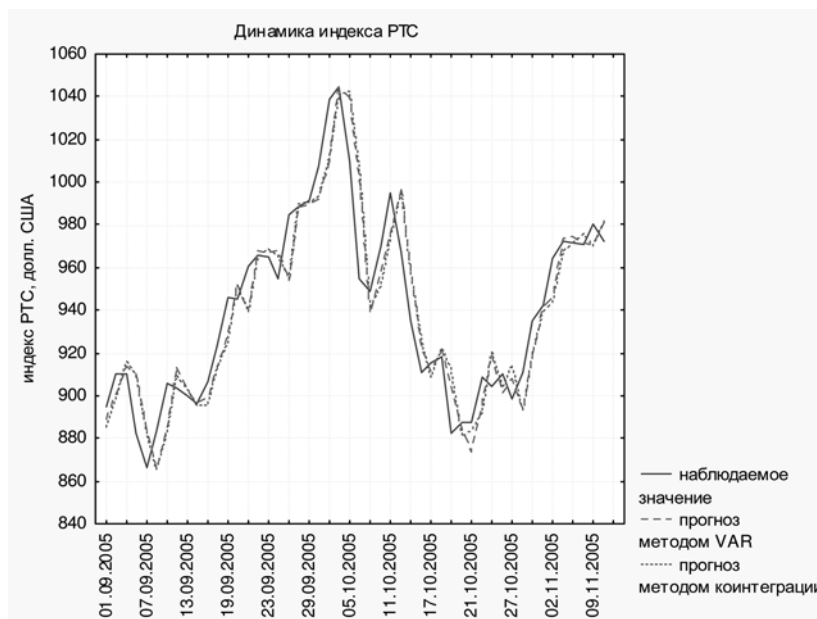


Рис. 5. Прогнозирование индекса РТС на 50 дней с помощью процедуры скользящего экзамена

Таким образом, можно говорить о том, что рассмотренные методы построения прогнозов динамики российского фондового рынка сопоставимы по своей эффективности с точки зрения выбранного критерия сравнения. Некоторое предпочтение может быть отдано системе прогнозирования на основе метода векторной авторегрессии.

Источники

- Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М., 1998.
- Лугачев М. И., Ляпунов Ю. П. Методы социально-экономического прогнозирования. М., 1999.
- Сулов В. И., Ибрагимов Н. М., Талышева Л. П. и др. Эконометрия. Новосибирск, 2003.
- Теория статистики / под ред. Г. Л. Громыко. М., 2002.
- Canova F. VAR Models: Specification, Estimation, Inference and Forecasting // Pesaran H., Wickens M. (Eds) Handbook of Applied Econometrics. Basil Blackwell, 1994.
- Enders W. Applied Econometric Time Series. New York, 1992.
- Engle R. F., Granger C. W. J. Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing // Econometrica. 1987. Vol. 55. P. 251—276.
- Gianni A., Giannini C. Topics in Structural VAR Econometrics, 2nd ed. Springer, 1997.
- Granger C. W. J. Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification // Journal of Econometrics, 1981. Vol. 16. P. 121—130.
- Hamilton J. D. Time Series Analysis. Princeton Univ. Press, 1994.
- Johansen J. Estimation and Hypothesis Testing of Cointegrating Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 1551—1580.
- Johansen J. Statistical Analysis of Cointegrating Vectors // Journal of Economic Dynamics and Control. 1998. Vol. 12. P. 231—254.
- Johansen J., Juselius K. Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration — With Application to the Demand for Money // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. 1992. Vol. 54. P. 461—471.
- Johnston J., DiNardo J. Econometric Methods. 4th edition. McGraw-Hill, Inc., 1997.
- Leamer E. E. Vector Autoregressions for Causal Inference // Brunner K.L., Meltzer A. (Eds) Understanding Monetary Regimes (Supplement to the Journal of Monetary Economics). 1985.
- Lutkepohl H. Introduction to Multiple Time Series Analysis, 2nd ed. Berlin, 1993.

MacKinnon J. C. Critical Values for Cointegration Tests // UC San Diego Discussion Paper, 1990. P. 90—94.

Sargan J. D. Wages and Prices in the United Kingdom: A Study in Econometric Methodology // Econometric Analysis for National Economic Planning / Ed. By Hart P. E., Mills G., Whiteker K. London, 1964; перепечатано в: *Econometrics and Quantitative Economics* // Ed. by Hendry D. F., Wallis K. F. Oxford, 1984.

Sims C. A. Macroeconomics and Reality // *Econometrica*. 1980. Vol. 48. P. 1—48.

Stock J. H. Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors // *Econometrica*, 1987. Vol. 55. P. 1035—1056.

Tsiao G. C., Box G. E. P. Modelling Multiple Time Series with Applications // *Journal of the American Statistical Association*, 1981. Vol. 76. P. 802—816.

Watson M. W. Vector Autoregression and Cointegration // *Handbook of Econometrics*. Amsterdam, 1994. Vol. 4.